REVISTA

DE

MATHEMATICA

PER

G. PEANO

Professore de Analysi infinitesimale ad Universitate de Torino

Tomo VIII

TORINO
FRATRES BOCCA EDITORES

1902-1906

REVUE DE MATHÉMATIQUES

TOME VIII — 1902

Recensione.

C. Arzelà. — *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, (vol. I, parte 1ª). Firenze, Le Monnier, 1901.

L'idea di fondere, in un Corso di Analisi infinitesimale, il Calcolo differenziale coll'integrale, venne ormai adottata da vari autori, (1) anche in recenti ed ottimi trattati; come sarebbero, in Italia, quelli del Peano (a.1893) e del Vivanti (a.1899). Tuttavia, fu l'Arzelà ad esporre pel primo, tra noi, il programma di tale materia, con siffatta distribuzione, nel Corso che detta da vari anni nella R. Università di Bologna. Anzi egli, prima ancora di introdurre i concetti di funzione continua e di derivata, comincia addirittura (come fa p.e. il Jordan nel suo *Traité d'Analyse*) con quello di integrale definito di una funzione, che in un dato intervallo è soltanto finita, ed ha in esso i limiti superiore ed inferiore pure finiti.

Il volume che egli ha pubblicato nell'autunno dell'anno scorso, e di cui vogliamo ora occuparci, riproduce appunto, come l'A. dichiara nella prefazione, la prima parte del Corso suddetto; e precisamente la teoria infinitesimale delle funzioni di una sola variabile.

Il prendere le mosse dall'idea di integrale definito presenta senza dubbio dei vantaggi; giacchè questo concetto si applica ad una classe di funzioni ben più estesa di quella delle funzioni continue. Inoltre, dopo aver parlato in seguito della continuità, si ha subito l'esempio di una classe molto generale di funzioni continue, nell'integrale definito di una funzione qualunque (integrabile) considerato come funzione del suo estremo superiore — od inferiore — variabile. E questo medesimo integrale, quando la funzione sotto il segno sia continua nell'intervallo di integrazione, ci fornirà anche l'esempio di una vasta classe di funzioni che ammettono derivata in ogni punto di un dato intervallo.

La fusione delle due parti del Calcolo mi sembra che nel trattato sia riuscita veramente intima ed armonica; giacchè i vari soggetti delle medesime sono alternati con molto criterio scientifico ed indubbia efficacia didattica. Tutti i concetti fondamentali che vanno mano mano succedendosi nel testo (come quelli di funzione, di integrale definito, di continuità, di derivata, ecc.)

(1) Di tale fusione si ha esempio fin dal secolo XVIII (veggasi il *Bollettino* di Loria, tomo II 1899, pag. 91, nota 2).

vengono esposti, non solo col massimo rigore, ma anche con grande chiarezza. E sebbene talvolta l'A., nello svolgerli, abbia forse abbondato in delucidazioni, è un fatto che per esse l'idea emerge limpida sotto ogni aspetto. Inoltre, tanto i concetti, come i teoremi e le formule, sono illustrati con molti esempi; e quando ne sia il caso, non viene mai tralasciata l'interpretazione geometrica.

Ed ora, passando ad analizzare il testo nelle sue varie parti, mi permetterò di fare in taluni punti qualche osservazione, di cui il chiaro A. potrà tener conto, se lo crederà opportuno, nel caso di una nuova edizione del libro.

Il primo articolo è quello che riguarda i limiti delle successioni ed i gruppi di numeri.

Nella definizione di limite superiore L di un gruppo (pag. 23) invece di dire che tra L ed L—ε deve esser compreso, per quanto piccolo sia ε, qualche numero del gruppo, è forse meglio dire che deve sempre esistere qualche numero del gruppo, appartenente ad ogni intervallo che abbia per estremi L ed L—ε; giacchè, con tale dicitura, chiaramente non si esclude che questo numero del gruppo possa essere L stesso. Ciò è bene di far rilevare, per poter poi concludere che, se esiste il massimo numero di un gruppo, esso ne è, in ogni caso, il limite superiore. Analogamente pel limite inferiore.

Mi sembra poi opportuno di notare subito che se il limite superiore, od inferiore, non è un punto del gruppo, esso ne è pero un punto-limite.

Il capitolo si chiude col cosiddetto lemma di Darboux (che serve di preparazione al concetto di integrale definito) il quale è esposto rigorosamente nella sua forma più generale.

Segue il capitolo relativo ai concetti di funzione e di integrale definito, ed alle proprietà di questi.

Nella bella digressione sul concetto di funzione è detto (pag. 37) che non è possibile assegnare in modo arbitrario (cioè indipendentemente l'uno dall'altro) i valori di una funzione in un numero infinito di punti; giacchè, per fare ciò, occorrerebbe anche un tempo infinito. Ora questa non sarebbe, mi pare, una ragione d'impossibilità; invece è meglio affermare senz'altro che l'arbitrarietà non può essere stabilita infinite volte.

Per quanto poi riguarda il significato geometrico di integrale definito, mi sembra che nel caso in cui lo si applica alla ricerca di un'area piana in coordinate polari (pag. 51) la dimostrazione debba esser leggermente modificata; giacchè l'area di ciascuno di quei triangoli considerati non sempre è compresa fra le aree dei due corrispondenti settori circolari: pel fatto che il terzo lato del triangolo (cioè quello che congiunge due punti della linea) può tagliare l'arco del minore di quei settori. Per lo meno, si faccia notare che la suddivisione dell'intervallo angolare che si considera è supposta fatta in numero abbastanza grande di parti, per modo che siffatto caso non abbia mai a verificarsi.

Nella dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni crescenti o decrescenti in tutto l'intervallo d'integrazione è detto (pag. 69) essere evidente che la somma degli intervalli parziali, nei quali l'oscillazione della funzione

supera un dato numero σ, arbitrariamente piccolo, può rendersi piccola a piacere. Ma quest'evidenza non mi sembra troppo manifesta. Credo sia preferibile dimostrare la suddetta integrabilità, ricorrendo alla definizione primitiva di integrale definito; come fa p.e. il Formul. a.1901, pag. 147,149.

A questo capitolo fa seguito quello sulla continuità e discontinuità delle funzioni.

Mi pare che per dimostrare la continuità della somma, del prodotto e del quoziente tra funzioni continue sia più semplice fare uso dei teoremi sui limiti, che non della sola definizione di funzione continua.

Nella dimostrazione del teorema (pag. 87) (1) che se una funzione è continua in tutto un intervallo, esiste almeno un punto di questo, nel quale essa ha per valore il suo limite superiore L; ed almeno uno, nel quale ha per valore il suo limite inferiore l, è detto che nell'intorno del punto di Weierstrass il limite superiore di $f(x)$ sarebbe $\frac{L_1+L}{2}$. Mentre deve dirsi che sarebbe $\leq \frac{L_1+L}{2}$; e quindi $<$ L.

Circa poi gli esempi di funzioni, che sono o no continue all'infinito (pag. 100-103), è bene far osservare che il fatto che possa essere:

$$\lim_{n=\pm\infty} f(x) =|= f(\lim_{n=\pm\infty} x)$$

si spiega perchè, nei casi considerati, il valore della funzione $f(x)$ è dato, per ogni valore di x, come il limite a cui tende una certa espressione $\varphi(x,n)$, col tendere all'infinito del parametro variabile n; e quindi non sempre sarà:

$$\lim_{x=\pm\infty} \{ \lim_{n=\pm\infty} \varphi(x,n) \} = \lim_{n=\pm\infty} \{ \lim_{x=\pm\infty} \varphi(x,n) \}$$

Il capitolo successivo è quello sugli infinitesimi.

Nel trattare delle somme (serie) di infiniti infinitesimi sarebbe stato opportuno accennare anche a quelle che sono esse pure infinitesime. Facendo notare p.e. che se i termini di una serie sono infinitesimi di ordine uniformemente superiore a quelli di un'altra serie, che sia assolutamente convergente, allora la somma della prima serie è anch'essa infinitesima.

Riguardo poi all'ordine di infinitesimo della somma di due infinitesimi, in luogo di dire semplicemente (pag. 121) che se y ed y_1 sono infinitesimi di ordini rispettivi n ed n_1, la somma $y+y_1$ sarà infinitesima di ordine uguale al minore dei due numeri n ed n_1, deve aggiungersi: se è $n=|=n_1$. E far notare che se invece è $n=n_1$ la somma medesima sarà un infinitesimo di ordine uguale o maggiore dell'ordine comune.

Al capitolo precedente segue quello sulla derivata di una funzione, colle relative applicazioni alle funzioni crescenti e decrescenti, ai massimi e minimi; ed infine la parte che tratta delle funzioni inverse.

(1) Formul. a.1901 §cont. P2·3 pag. 136.

Fra le proprietà generali della derivata era bene metter subito qui anche quella notevolissima, che la avvicina alle funzioni continue; cioè che se una funzione è derivabile in un dato intervallo, la sua derivata è capace di assumere in questo ogni valore compreso tra due altri qualunque, che essa derivata acquista all'intervallo medesimo. Di tale proprietà si dà invece la dimostrazione nel capitolo sulle espressioni di forma indeterminata (pag. 359) per fare poi ivi una osservazione. Mentre allora sarebbe il caso di richiamare soltanto detta proprietà.

Vengono poi i capitoli sul differenziale di una funzione, e sul teorema del valor medio, coi relativi corollari.

Fra le conseguenze di questo importante teorema è opportuno aggiungere anche l'altra: Se una funzione derivabile tende ad ∞, col tendere di x ad x_0; e, se essendo $f'(x)$ sempre finita per $x \neq x_0$, esiste $\lim\limits_{x=x_0} f'(x)$, questo limite sarà necessariamente ∞. Tale proprietà è dimostrata dall'A. nel capitolo già accennato, sulle espressioni di forma indeterminata (pag. 363) per potere far poi ivi una osservazione. Ma la dimostrazione che ne è data mi sembra debba essere meglio chiarita, come appresso.

Essendo

$$\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0+\varepsilon)}{\delta-\varepsilon}=f'[x_0+\varepsilon+\theta(\delta-\varepsilon)]$$

se lasciamo fisso δ, e facciamo tendere ε a zero, sarà

$$\lim_{\varepsilon=0} f'[x_0+\varepsilon+\theta(\delta-\varepsilon)]=\pm\infty$$

Perciò avremo pure

$$\lim_{\delta=0} \left\{ \lim_{\varepsilon=0} f'[x_0+\varepsilon+\theta(\delta-\varepsilon)] \right\} =\pm\infty$$

In tal modo si viene, in $f'(x)$, a far tendere x ad x_0, facendogli percorrere una speciale successione di valori (a causa del numero θ, che varia insieme ed ε e a δ). Ma se esiste $\lim f'(x)$ quando x tende liberamente ad x_0, poichè il precedente limite particolare è ∞, non potrà essere finito nemmeno quel limite più generale; cioè sarà esso pure ∞.

Seguono i capitoli sugli integrali indefiniti, e sulle regole generali di derivazione ed integrazione.

E' da notarsi che tra le formule che danno la derivata dei vari tipi di funzioni esplicite manca quella di $\mathrm{D}f(x)^{\varphi(x)}$; la quale subito si ottiene, osservando che è: $f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\log f(x)}$.

In quanto poi alla dimostrazione diretta della formula che costituisce il metodo d'integrazione per sostituzione, non sembrami che sia diventata del tutto rigorosa nemmeno colle considerazioni che vengono aggiunte subito dopo (pag. 197). Mentre si può renderla tale, con qualche modificazione, nel modo seguente.

Diviso l'intervallo $u_1 \ldots\ldots u$ in n parti, coi punti $u_2, u_3 \ldots\ldots u_n$, si ha:

$$\int_{u_1}^{u} f(u)\mathrm{d}u = \lim_{\Delta u = 0} \{ f(u_1)\Delta u_1 + f(u_2)\Delta u_2 + \ldots\ldots + f(u_n)\Delta u_n \}$$

essendo $\Delta u_s = u_{s+1} - u_s$, $\Delta u_n = u - u_n$.

E poichè $u = u(x)$ è funzione di x invertibile, ai punti $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n, u$ corrispondono gli altri $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, x$. Ora si ha:

$$\Delta u_s = u(x_{s+1}) - u(x_s) = u'(x_s + \theta_s \Delta x_s) \,.\, \Delta x_s$$

con $0 < \theta_s < 1$, $\Delta x_s = x_{s+1} - x_s$.

Ma essendo $u(x)$ una funzione sempre crescente, o sempre decrescente, sarà $u(x_s + \theta_s \Delta x_s)$ un valore di u compreso tra u_s ed u_{s+1}. Quindi $f[u(x_s + \theta_s \Delta x_s)]$ sarà un valore di $f(u)$ nell'intervallo $u_{s+1} - u_s$; ed allora, per la definizione di integrale definito avremo pure:

$$\int_{u_1}^{u} f(u)\mathrm{d}u = \lim_{\Delta x = 0} \{ f[u(x_1 + \theta_1 \Delta x_1)].u'(x_1 + \theta_1 \Delta x_1).\Delta x_1 + f[u(x_2 + \theta_2 \Delta x_2)]$$

$$u'(x_2 + \theta_2 \Delta x_2).\Delta x_2 + \ldots\ldots \} = \int_{x_1}^{x} f[u(x)] \,.\, u'(x)\mathrm{d}x$$

Perchè $f[u(x_s + \theta_s \Delta x_s)]u'(x_s + \theta_s \Delta x_s)$ è un valore di $f[u(x)] \,.\, u'(x)$ in un punto dell'intervallo $x_{s+1} - x_s$.

Vengono poi i capitoli che trattano dell'integrazione delle funzioni razionali e dei tipi più notevoli di funzioni irrazionali o trascendenti. Seguono quelli sugli integrali definiti impropri (sviluppati con molte considerazioni ed esempi) e sulla lunghezza di un arco di linea piana.

Per quanto riguarda quest'ultimo argomento, prima d'affermare (pagina 318) che esiste, determinato e finito,

$$\lim \Sigma \delta_s \,.\, \sqrt{1 + f'^2(x_s + \theta_s \delta_s)},$$

qualunque sia il modo secondo cui le δ tendono a zero, e che tale limite sarà

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x,$$

era bene dimostrare l'integrabilità della funzione $\sqrt{1+f'^2(x)}$; a meno che non si voglia limitarci al caso in cui sia $f'(x)$ continua, o generalmente continua.

Taluni autori (Formul. a.1901 §Arc. pag. 208) preferiscono definire come lunghezza di un determinato arco di linea il limite superiore delle lunghezze di tutte le poligonali inscrittibili nell'arco; la quale definizione presenta senza dubbio dei vantaggi.

Circa poi la formula che dà la lunghezza di un arco in coordinate polari, essa è trovata coll'uso di considerazioni infinitesimali, che possono lasciare, in chi non è famigliare con esse, qualche dubbio sul loro perfetto

rigore. Credo quindi sia preferibile dedurla dalla formula più generale che vien subito dopo — la quale dà la lunghezza di un arco di linea, i cui punti hanno le coordinate espresse in funzione di un parametro indipendente t — quando per t si assuma l'ordinaria ascissa angolare ω delle coordinate polari. Dopo sarà bene accennare alla dimostrazione, col metodo infinitesimale; anche per mostrare la grande efficacia del medesimo.

I capitoli che seguono sono quelli sulle derivate e differenziali d'ordine superiore, sulla formula di Taylor, sulle espressioni di forma indeterminata, e sui massimi e minimi delle funzioni. Il libro si chiude infine coi capitoli sulle serie di funzioni (delle quali è studiata la convergenza uniforme, l'integrabilità, la continuità, la derivabilità), sulle serie di potenze, e sullo sviluppo di una funzione in serie di Taylor e di Maclaurin.

Ai vari teoremi sulle serie di funzioni, di convergenza uniforme in un dato intervallo, aggiungerei quello relativo al limite della somma delle medesime. Tanto più che esso può servire a dimostrar subito la continuità della somma di una serie uniformemente convergente, i cui termini siano funzioni continue.

Infine è bene far notare che gli sviluppi in serie di $\log(1+x)$ e $\operatorname{arc\,tg} x$, che sono stati trovati nell'ipotesi di $|x|<1$, valgono pure per $x=1$ il primo, e per $x=\pm 1$ il secondo; come si riconosce subito. Anche perchè, altrimenti, non sarebbe lecito dedurre dal secondo di essi lo sviluppo in serie di $\frac{\pi}{4}$.

Quest'analisi minuziosa, e forse troppo particolareggiata, del testo, mostra il vivo interesse che può destare la lettura del medesimo. Le molte, ma talvolta insignificanti osservazioni, che chi scrive si è permesso di fare, sono di natura tale che non alterano per nulla l'intrinseca bontà del libro. Il quale, per la profondità delle considerazioni, la chiarezza dell'esposizione, ed il rigore del metodo, va certo annoverato fra i migliori.

Il chiaro autore, nel dare presto alla luce le parti che rimangono, verrà a completare l'opera già utilissima che ora ha reso, pubblicando questa prima parte del suo Corso.

La stampa del libro è ben riuscita, per la nitidezza dei caratteri; ma non sono rari gli errori tipografici.

Pavia, 14 febbraio 1902.

Mineo Chini.

Confronto col Formulario.

Credo utile confrontare le varie proposizioni contenute nell'opera del prof. Arzelà, di cui precede la recensione scritta dal prof. Chini, colle corrispondenti formule del Formulario.

I varii teoremi non sono che il materiale di cui si compone l'opera. Le lezioni, aventi uno scopo didattico, costituiscono un'ordinata raccolta di quelle proposizioni, fatta con criterii che si potrebbero dire artistici, e nei quali il nostro A. è valentissimo. Questo lato importante dell'opera sparisce del tutto nell'analisi che segue.

Il confronto che segue è reso possibile, da un lato, causa la gran perfezione cui è arrivato il Calcolo infinitesimale, e dal rigore con cui il nostro A. lo tratta. E anche dal fatto che il Formul. nelle successive edizioni diventa una raccolta sempre più completa di teoremi e dimostrazioni.

Userò l'edizione del Formul. 1902, salvo nella Trigonometria e Geometria in cui mi riferirò all'edizione 1901, non essendo ancora pubblicata la nuova.

* * *

p.1. L'A. chiama « successione ordinata », ciò che da molti chiamasi semplicemente « successione », in simboli « qfN_0 ».

b) *c*). Df del lim d'una successione = §lim 3·1.

p.2 *d*). Invece di $y_m > x_m$ leggasi $y_m \gtreqless x_m$.

e). Condizione di convergenza = §lim 3·3.

p.5. Altra forma della stessa condizione = §lim 3·4.

p.6 *h*) = §lim 4·2·3.

p.8. L'A. porta l'esempio = §lim 10·3.

p.9. limite infinito = §lim 3·2

linea 6ª dal basso. Il termine « crescono » deve essere sostituito con « variano ».

p.9-10 *n*). Da una successione l'A. ne « trae » un'altra. Questo termine parmi ambiguo. Se estrarre dai numeri naturali, che possono essere gli indici della successione data, un'altra successione, significa formare una $(\mathrm{N}_0\mathrm{fN}_0)$cres, tutto va bene. Se invece si intende di indicare una $(\mathrm{N}_0\mathrm{tN}_0)$sim, allora si deve dimostrare la prima proposizione dell'A. dandone una Dm equivalente a §lim 5·1, e ritenere evidente la seconda (poichè fra queste corrispondenze v'è anche l'identità), contrariamente a ciò che fa l'A., che ritiene evidente la prima, e dimostra la seconda.

Forse l'A. intende di indicare i teoremi §lim 62·4, e colla *p*) il §lim 62·5.

p.12-13. Il troppo noto enunciato « affinchè una serie sia convergente è necessario e sufficiente che sia $\lim_{n=\infty} \mathrm{R}n = 0$ » è un circolo vizioso, perchè solo è definito il resto, quando la serie è convergente.

p.13. Attribuisce a Newton la formula del binomio molto più antica.

p.15. L'A. parla costantemente del limite d'una successione, secondo §lim 3·1; e non vi si trova mai definito il limite d'una funzione d'una variabile variante in un campo, i cui valori non sono ordinati in successione, e spesso non sono ordinabili. Cioè l'A. non enuncia una Df corrispondente a §lim 62·1. Ciò obbliga l'A. tutte le volte che deve parlare del limite d'una variabile reale, a ricondurlo al limite d'una successione (pagine 70, 94-95).

p.19. Gruppi di numeri. Enuncia e dimostra §Num 10·7.

p.20. e §Num 11·2.

p.22. Esempi = §δ·6.

p.24 = §q 2·1.

L'A. dimostra i teoremi sui limiti superiori e inferiori partendo da quelli sui limiti, cammino inverso a quello seguito nel F, ove prima si parla dei limiti superiori e poi dei limiti.

L'analisi delle idee fondamentali che entrano nella costituzione dei concetti di « limite superiore d'un gruppo », e di « limite d'una successione », prova che la prima contiene non solo un minor numero di idee aritmetiche, ma anche di idee di logica.

p.26. Lemma di Darboux.

Questa P, il cui enunciato occupa una pagina, non trovasi nel Formul., come non trovasi nelle mie Lezioni a.1893, perchè se ne può fare a meno, per le ragioni accennate in §S nota.

Essendo però una P vera, ed importante storicamente, si può inserire nel Formul. sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned}
&\S\mathrm{S}\ 2{\cdot}6 \quad f\varepsilon\,\mathrm{qf}\Theta\,.\,\mathrm{l}'f`\Theta,\mathrm{l}_{,}f`\Theta\varepsilon\mathrm{q}\,.\,h\varepsilon\mathrm{Q}\,.\supset.\\
&\quad\exists\,\mathrm{Q}\frown k\ni[n\varepsilon\mathrm{N}_1\,.\,x\varepsilon(\Theta\mathrm{f}0\cdots n)\mathrm{cres}\,.\,x_0=0\,.\,x_n=1 : r\varepsilon 0\cdots(n-1)\\
&\quad.\supset_r.\ x_{r+1}-x_r<k :\supset_{n,x}.\ \mathrm{s}'(f,n,x,\Theta)-\mathrm{S}'(f,\Theta)<k]
\end{aligned}$$

¦ Darboux a.1875 p.66 ¦

cioè:

« Sia f una quantità funzione d'una variabile compresa nell'intervallo da 0 ad 1. Supponiamo finiti il limite superiore e il limite inferiore dei valori della funzione nell'intervallo coincidente.

Fissiamo una quantità positiva (arbitrariamente piccola) h.

Allora si può determinare un'altra quantità positiva k tale che:
comunque si divida l'intervallo da 0 ad 1 in n parti (n è un numero naturale), coi valori crescenti $x_0=0, x_1, x_2, \ldots x_n=1$,
ma in guisa però che l'ampiezza d'ogni intervallo parziale sia $<k$,
ne risulta sempre che la somma s' dei prodotti delle ampiezze degli intervalli parziali pei limiti superiori della funzione in quegli intervalli, differisca dall'integrale superiore S' meno di h ».

p.37. Che non si possa determinare una successione assegnandone ad arbitrio gli infiniti termini, già risultò in MA. t.37 p.208-210 e p.223. E ciò perchè è intraducibile in simboli di logica matematica siffatto ragiona-

mento. Nella trasformazione del suddetto lavoro fatta dal Mie, queste questioni di Logica furono eliminate. E questa osservazione ha molta importanza pratica; perchè spesso nei libri comuni si danno dimostrazioni di questa forma, inconcludenti. Sarebbe tale ad es. quella del nostro A. a pagina 3, ove non vi si trovassero le due ultime righe, che la rendono del tutto rigorosa.

p.41 *d*). Teorema di Weierstrass, generalizzato = §lim 61·1.

p.56 *d*). Facendo maggior uso degli integrali superiore ed inferiore, qualche Dm si semplifica; si confronti con §S 3·1.

p.61. Primo teorema della media = §S 3·61, colla stessa Dm.

p.64. Gli eleganti calcoli di alcuni integrali, dedotti direttamente dalla Df, già interessarono il D.r Boggio, che li tradusse in simboli in RdM, ed ora trovansi nel Formul. p.182...

p.70. Continuità. L'A. assume per Df §cont 1·01, ne deduce la 1·0, servendosi del limite d'una successione per le ragioni dette a proposito della pag. 15.

Questo scambio di Df obbliga l'A. a rienunciare a p.81-86 dei teoremi sulla continuità, che sono la ripetizione di quelli sui limiti.

p.87 *b*) = §cont 2·3.

p.88 *c*) = §cont 2·2.

p.92 *f*). Teorema di Cantor = §cont 1·1.

Nel Formul. esso è attribuito ad altri. La Dm del nostro A. è abbastanza semplice, e meriterebbe d'essere tradotta in simboli.

p.93 *g*) = §S 14·1.

p.94-96. L'A. riconduce il concetto del limite d'una funzione d'una variabile reale a quello del limite d'una successione.

Si può scrivere in simboli questo modo di vedere dell'A. enunciando la definizione possibile:

$$\S\mathrm{lim}\ 62{\cdot}7 \quad u\varepsilon\, \mathrm{Cls'q}\ .\ f\varepsilon\, \mathrm{qf}u\ .\ x\varepsilon\, \delta u\ .\supset.$$
$$\mathrm{lim}(f,u,x) = \iota\, z\ni(y\varepsilon\, u\mathrm{fN}_0\ .\ \mathrm{lim}y = x\ .\supset_y.\ z = \mathrm{lim}fy) \qquad \mathrm{Dfp}$$

p.104. « secondo teorema della media » = §S 3·7.

p.115. I teoremi sulla sostituzione degli infinitesimi non furono tradotti in simboli, e se ne può fare a meno.

p.122. Derivata ordinaria, a destra, a sinistra = §D 1·0.

p.123 *b*). Continuità della funzione avente derivata = §D 5·2.

p.130 2.*a*). = P5·1·11.

p.134 *c*). Merita menzione il teorema, da aggiungersi al Formul.:

$$\S\mathrm{cont}\ 2{\cdot}4 \quad a,b\varepsilon\,\mathrm{q}\ .\ a<b\ .\ f\varepsilon\,(\mathrm{qf}a\,\bar{}\,b)(\mathrm{cont}\frown\mathrm{sim})\ .\supset.$$
$$f\varepsilon\,(\mathrm{qf}a\,\bar{}\,b)(\mathrm{cres}\smile\mathrm{decr})$$

p.138. = §S 20·4.

p.141 *b*) = §D 2·0.

p.142 *c*) $=$ §D 4·8.

d) $=$ §log 7·2.

p.143 *e*) $=$ §log 7·1.

f). Si trova in F1901; sarà contenuta nell'edizione futura.

p.156. Teorema del valore medio $=$ §D 5·4. Nel Formul. c'è il passo corrispondente di Cavalieri, mentre il nostro A. l'attribuisce a Lagrange.

p.171. È da un punto di vista più generale, e da altro caso particolare di §S 20·2. Invero non è necessario supporre che la derivata sia generalmente continua, affinchè sia integrabile.

p.179. Derivata della somma $=$ §D 2·2. L'integrale della somma esige, per questa via, la condizione della continuità, che, come l'A. ha già osservato prima, è superflua.

p.182 $=$ §S 20·6.

p.188. « funzioni di funzioni » $=$ §D 3·1.

p.194. « integrazione per sostituzione » $=$ §S 20·5. Dalla Dm pare risulti che non è necessaria la continuità di u', supposta dall'A. e nel Formul. Questione a studiarsi.

Nell'enunciato a pag. 194 l'A. ha introdotto, non so perchè, condizioni dipendenti fra loro.

p.307. Il teorema per riconoscere l'integrabilità all'infinito d'una funzione rassomiglia a §S 10·5. Però l'enunciato non concorda colle Df precedenti. Invero $\mathrm{S}dx/(x\log x)$ esteso all'∞, è ∞, e la funzione a integrarsi è infinitesima d'ordine maggiore di 1, secondo la Df a pag. 109.

p.308. Questi integrali corrispondono a §π10 di F1901. L'ultimo di p.308 deve essere corretto secondo il 10·23 del Formul.

p.310 $=$ §sin 12·5 di F1901.

La lunghezza d'un arco di curva è definita con troppe restrizioni, sicchè resta escluso p.es. l'arco della spirale logaritmica, contato dal polo, perchè (p.324-325) non « può decomporsi in un numero finito di parti incontrate da una retta qualsivoglia parallela ad un asse in un punto solo ».

p.331. L'arco di spirale d'Archimede va corretto come in RdM. t.7 p.105 §vct53·2.

p.346 2.*a*) $=$ §DS·3.

p.350. « formula abbreviata di Taylor » $=$ §D 11·1. Essa però è di Lagrange. L'A. non enuncia la P10, di Taylor-Bernoulli.

p.356. Regola dell'Hospital per le espressioni che si presentano sotto forma indeterminata $=$ §D 6·1. Secondo studi aggiunti al Formul. dal sig. Eneström, essa spetta a Joh. Bernoulli.

Però la P del nostro A. coincide con §D 6·2; ed ottiene la ·1 del Formul. con ipotesi restrittive non necessarie.

p.373. La determinazione del massimo o minimo d'una frazione coincide con §D 12·4, salvochè l'A. fa l'ipotesi inutile della continuità della derivata seconda.

p.388. « Convergenza in egual grado ». L'A. dà un solo criterio per riconoscere questa convergenza; nel Formul. questo criterio è introdotto nei teoremi stessi, come in §lim 37·1.

p.389 d). $=$ §S 13·12.
p.391 f). $=$ §cont 3.3.
p.392 g). $=$ §D 14·2.

p.397-398. Curiosi teoremi sulla convergenza eguabile. Mancano nel Formulario, ma la traduzione in simboli non è semplice.

p.399. « Serie di potenze » $=$ §q′ 10·2.

p.403. « Intervallo di convergenza » $=$ §q′ 10·21·22. L'A. parla qui dei punti limiti d'una successione; ma questi non sono i punti del gruppo derivato (in simboli δ), nè i limiti (lim) come ha definito l'A., bensì i Lm (classe limite) del Formulario, che l'A. non ha definito.

Siccome questa lacuna della Df del segno Lm, o di termine equivalente, è diffusissima, sarà utile uno schiarimento.

La serie $1+x+x^2+\ldots$ ha per intervallo di convergenza $-1 \frown 1$. Il gruppo dei rapporti dei coefficienti consta del solo numero 1; esso non ha gruppo derivato, cioè non ha punti limiti secondo le Df di questi, date dal signor Cantor, e usate generalmente (Formul. §δ). Quindi l'estremo 1 deldell'intervallo di convergenza non è il massimo di questi punti limiti che non esistono.

In altri termini, quasi tutti gli autori confondono le idee espresse dai simboli λ δ lim Lm.

p.407 e). Aggiungere al Formul.

$$\text{§q}'\,11{\cdot}1 \quad \text{Hp}\,10{\cdot}2 \;.\supset.$$
$$\text{D}\{[\Sigma(u_n z^n | n, \text{N}_0)] | z, \text{q}' \frown z \ni (\text{mod}\, z < \text{mod}\, a), x\} = \Sigma[n u_n x^{n-1} | n, \text{N}_1]$$

f). Aggiungere al Formul.

$$\text{§lim}\; 31{\cdot}11 \quad a, b \,\varepsilon\, \text{qf}\,\text{N}_0 \,.\, u \,\varepsilon\, \text{Cls}'\text{q} \,.\, 0 \,\varepsilon\, \delta u : x \,\varepsilon\, u \;.\supset_x.$$
$$\Sigma(a_n x^n | n, \text{N}_0), \Sigma(b_n x^n | n, \text{N}_0) \;\varepsilon\, \text{q} \,.\, \Sigma(a_n x^n | n, \text{N}_0)$$
$$= \Sigma(b_n x^n | n, \text{N}_0) : r \,\varepsilon\, \text{N}_0 \;.\supset_r.\; a_r = b_r$$

Parimenti i teoremi g), h), k) dell'A. meriterebbero d'essere enunciati in simboli. Essi trovansi pure nelle mie aggiunte alle Lezioni del Genocchi a.1884 p.229.

p.417. e) $=$ §D 14·1.
p.421. g) $=$ §D 11·2.
p.426. Sviluppi in serie $=$ §log 4·1·2.
p.429. Arco d'ellisse $=$ F1901 §sin 14·1.
p.430 $=$ §S 13·3.

G. Peano.

Théorie générale des séries bien-ordonnées

PAR

BERTRAND RUSSELL

TABLE DES MATIÈRES

1. Définition d'une série bien ordonnée. Les progressions et les séries finies.
2. La relation de similarité entre relations.
3. L'addition et la multiplication des relations bien ordonnées et des nombres ordinaux.
4. Les progressions et les premières dérivées.
5. Les segments.
6. Les lois formales de l'arithmétique ordinale.
7. Les nombres ordinaux et les permutations.
8. La série des dérivées d'une série bien ordonnée.
9. La série des nombres ordinaux de la deuxième classe.
10. Les nombres de la classe *e*.

Au sujet des séries bien ordonnées, on connaît beaucoup de théorèmes, qui sont dûs, presque tous, au génie de Georg Cantor. Mais les méthodes qu'on a proposées jusqu'ici pour réduire ces théorèmes en symboles, parmi lesquelles on peut signaler celles de M. Schröder [1]), de M. Vivanti [2]), et de MM. Vailati [3]) et Burali-Forti [4]), sont tellement compliquées qu'il est impossible de les employer dans les démonstrations, ou de découvrir des théorèmes nouveaux en s'en servant. Pour exprimer d'une manière simple les théoremes sur les séries, il faut se rendre compte des idées fondamentales qui entrent dans ces théorèmes. Une analyse correcte des idées est un préliminaire indispensable de l'expression symbolique d'une théorie qui a été développée par le langage ordinaire. Or on considère une série en général comme une classe de termes arrangées dans un ordre quelconque. Il y a là, cependant, une difficulté, savoir

---

[1]) *Algebra und Logik der Relative.* (Leipzig 1895), Neunte Vorlesung.
[2]) F 1 VI.
[3]) RdM. II, pp.71-75.
[4]) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. VIII, pp.169-179.

qu'on peut changer l'ordre des termes. Ce ne sont donc pas les termes à eux seuls qui définissent la série, mais les termes en combinaison avec une relation par laquelle on les ordonne. Mais on démontre, par la logique des relations, que si on a une relation entre certains couples de termes donnés et d'autres encore, il existe une seule relation entre tous les couples donnés qui n'a pas lieu pour aucun autre couple (voir l'article précédent, § 2, Prop 3·1·11). Donc si cette relation est donnée, les couples en question sont aussi donnés en même temps.

Ainsi, si la relation est de l'espèce qui engendre des séries, la relation détermine complètement la série, et on n'a pas besoin de mentionner les termes. Les termes sont en effet ce que j'appelle le champ de la relation, c'est-à-dire la somme logique de ϱ et de $\breve{\varrho}$, si R est la relation. La théorie des séries n'est, par conséquent, que la théorie d'une certaine classe de relations. Ce n'est que par la logique des relations que l'on peut obtenir un symbolisme simple et utile pour les séries. Cependant la méthode de MM. Peirce et Schröder n'est pas assez simple, et il paraît qu'il est essentiel de se baser sur le système de M. Peano, en introduisant les relations comme je l'ai fait dans l'article précédent.

Les théorèmes suivants se trouvent en général chez Cantor, particulièrement dans les Mathematische Annalen, vol. 49. Je n'ai pas cru nécessaire de renvoyer à Cantor chaque fois que je lui dois une Df ou une Proposition.

Je présuppose la théorie des séries finies et des progressions, qui se trouve dans l'article précédent, § 3.

* 1·1 $\Sigma = \mathrm{Rel} \frown \mathrm{P} \ni (\mathrm{P} \supset 0' \,.\, \mathrm{P}^2 \supset \mathrm{P} : x \varepsilon \pi \cup \breve{\pi} \,.\supset_x.$
$\pi x \cup \iota x \cup \breve{\pi} x = \pi \cup \breve{\pi})$ Df

Σ est la classe de toutes les relations qui engendrent des séries.

Ces relations (1) sont contenues dans la diversité, (2) sont transitives, (3) sont *connexes*, c'est-à-dire, entre deux termes différents quelconques du champ de la relation, la relation génératrice a toujours lieu. Ce sont ces trois faits qu'exprime la définition.

·11 $\mathrm{P} \varepsilon \Sigma \,.\supset.\, p = \pi \cup \breve{\pi}$ Df

p est la série engendrée par P. Il y a dans *p* un terme au plus qui n'appartient pas à π.

1·12 $\mathrm{P}\varepsilon\Sigma \,.\!=.\, \breve{\mathrm{P}}\varepsilon\Sigma$

·2 $\Omega = \Sigma \cap \mathrm{P}\ni\{\exists\pi-\breve{\pi} : u\supset\pi \,.\, \exists u\breve{\pi} \,.\!\supset_u\!.\, \exists\breve{\pi} \cap x\ni(\pi x = u\cup\pi u)\}$ Df

Ω est la classe des relations qui engendrent des séries bien-ordonnées; je l'appellerai la classe des relations bien ordonnées.

Ces séries ont un premier terme, et sont telles que toute classe contenue dans la série, si elle a des successeurs, a un sucecesseur immédiat, c'est-à-dire, un terme qui succède à la classe entière, mais dont tous les prédécesseurs appartiennent à la classe ou en précèdent un terme ou plusieurs.

·21 $\mathrm{P}\varepsilon\Sigma \,.\!\supset\!.\, \pi\cup\breve{\pi}\ \varepsilon\ \mathrm{Elm}\cup\iota\Lambda$

[$x,y\varepsilon\ \pi-\breve{\pi} \,.\, y\varepsilon\ \pi x\cup\iota x\cup\breve{\pi}x \,.\, \pi x=\Lambda \,.\, \pi y=\Lambda \,.\!\supset\!.\, y\varepsilon\iota x \,.\!\supset\!.$ Prop]

Cette proposition montre que toute série a un premier terme au plus.

·22 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, x\varepsilon\pi \,.\!\supset\!.\, \exists\breve{\pi}\cap y\ni(x\mathrm{P}y \,.\, x-\mathrm{P}^2y)$

[Hp $.\!\supset\!.\ \exists\breve{\pi}\cap y\ni(\pi y = \iota x\cup\pi x) \,.\!\supset\!.\ \exists\breve{\pi}x\cap y\ni(\pi y\cap\breve{\pi}x = \Lambda) \,.\!\supset\!.$ Prop]

Cette proposition montre que tout terme d'une série bien ordonnée (excepté le dernier terme, s'il existe) a un successeur immédiat, c'est-à-dire, un prochain terme.

·23 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\!\supset\!.\, \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}\cap -\mathrm{P}^2$ Df

·24 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\!\supset:\, \mathrm{P}_1\varepsilon\ 1\div 1$

[$x\mathrm{P}_1y \,.\, x\mathrm{P}_1z \,.\!\supset\!.\, y-\mathrm{P}z \,.\, z-\mathrm{P}y \,.\, z\varepsilon\pi y\cup\iota y\cup\breve{\pi}y \,.\!\supset\!.\, z\varepsilon\iota y$ (1)

$x\mathrm{P}_1z \,.\, y\mathrm{P}_1z \,.\!\supset\!.\, x-\mathrm{P}y \,.\, y-\mathrm{P}x \,.\, x\varepsilon\ \pi y\cup\iota y\cup\breve{\pi}y \,.\!\supset\!.\, x\varepsilon\iota y$ (2)

(1) . (2) $.\!\supset\!.$ Prop]

·25 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\!\supset\!.\, \pi_1 = \pi$ [Prop 1·22 $.\!\supset\!.$ Prop]

·26 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\!\supset\!.\, \breve{\pi}_1\supset\breve{\pi}$

·27 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \breve{\pi}\supset\pi \,.\!\supset\!.\, p\varepsilon$ Cls infin

[$\breve{\pi}\supset\pi \,.\, \pi_1=\pi \,.\!\supset\!.\, \breve{\pi}_1\supset\pi_1$ (1)

$\exists\pi-\breve{\pi} \,.\!\supset\!.\, \exists\pi_1-\breve{\pi}_1$ (2) (1) . (2) . $\mathrm{P}_1\varepsilon 1\div 1 \,.\!\supset\!.$ Prop]

·3 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\!\supset\!.\, \delta p = \breve{\pi}-\breve{\pi}_1$ Df

δp est la première dérivée de la série p. δp consiste de tous les termes (excepté le premier) qui n'ont pas de prédécesseur immédiat.

Cette Df ne s'applique qu'aux séries bien-ordonnées, car en général la dérivée ne se définit qu'au moyen des segments. (Voir le N. 5).

·31 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \exists\delta p \,.\!\supset\!.\, p\varepsilon$ Cls infin

[$x\varepsilon\delta p \,.\!\supset\!.\, \pi_1(\pi x) = \pi x \,.\, \breve{\pi}_1(\pi x) = \pi x\cap\breve{\pi}_1 \,.$

$\supset\!.\, \breve{\pi}_1(\pi x)\supset\pi_1(\pi x) \,.\, \exists\pi_1(\pi x)-\breve{\pi}_1(\pi x) \,.\!\supset\!.$ Prop]

1·32 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, p\varepsilon\, \mathrm{Cls\ fin} \,.\!\supset\!.\, \delta p = \Lambda$ [Prop 1·31 . Transp $.\!\supset\!.$ Prop]

·33 $\Omega\ \mathrm{infin} = \Omega \cap \mathrm{P}\ni(p\varepsilon\, \mathrm{Cls\ infin})$ Df

·34 $\Omega\ \mathrm{fin} = \Omega - \Omega\ \mathrm{infin}$ Df

·35 $\omega = \Omega\ \mathrm{infin} \cap \mathrm{P}\ni\{ s\varepsilon\,\mathrm{Cls} \,.\, \pi - \breve{\pi}$

$\supset s \,.\, \breve{\pi}_1(\pi \cap s) \supset s \,.\!\supset\!.\, p \supset s \}$ Df

Prop 1·35 est la Df du nombre ordinal ω. Nous verrons plus tard (Prop 2·12) que tout nombre ordinal est une classe de relations bien ordonnées. La Df qu'on vient de donner doit supplanter la Df de l'article précédent (§ 3, Prop 1·1), qui aurait dû être une Df du nombre cardinal α_0. (Voir plus bas, Prop 7·32).

·36 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \exists\delta p \,.\!\supset\!.\, \mathrm{P} - \varepsilon\omega$

[$y\varepsilon\delta p \,.\, s = \pi y \,.\!\supset\!:\, \pi - \breve{\pi} \supset s \,.\, \breve{\pi}_1(\pi \cap s) \supset s \,.\, y - \varepsilon s :\supset.\, \mathrm{P} - \varepsilon\omega$]

.37 $\mathrm{P}\varepsilon\omega \,.\!\supset\!.\, \delta p = \Lambda$ [Prop 1·36 . Transp $.\!\supset\!.$ Prop]

·38 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, v \supset p \,.\, \exists v \,.\!\supset\!.\, \exists v - \breve{\pi} v$

[$\pi - \breve{\pi} \supset v \,.\!\supset\!.\, \iota\pi - \breve{\pi}\ \varepsilon\ v - \breve{\pi} v$ (1)

$v \cap \pi - \breve{\pi} = \Lambda \,.\!\supset\!.\, \exists v\pi$ (2)

(2) . $\pi(v\pi) \supset v\pi \,.\!\supset\!.\, \exists p \cap x\ni(\pi x = v\pi)$ (3)

$x\varepsilon p \,.\, \pi x = v\pi \,.\!\supset\!.\, x\varepsilon v - \breve{\pi} v$ (4) (1) . (4) $.\!\supset\!.$ Prop]

Cette Prop montre que toute classe existante contenue dans une série bien ordonnée a un premier terme. La converse est aussi vraie, de sorte qu'on a $\Omega = \Sigma \cap \mathrm{P}\ni\{v \supset p \,.\, \exists v \,.\!\supset\!.\, \exists v - \breve{\pi} v\}$ ce qui est une Dfp.

·39 $\mathrm{P}\varepsilon\ \Omega\ \mathrm{infin} - \omega \,.\!\supset\!.\, \exists\delta p$

[Hp $.\!\supset\!.\ \exists\ \mathrm{Cls} \cap s\ni\{\pi - \breve{\pi} \supset s \,.\, \breve{\pi}_1(\tau \cap s) \supset s \,.\, \exists p - s\}$ (1)

$s\varepsilon\ \mathrm{Cls} \,.\, \pi - \breve{\pi} \supset s \,.\, \breve{\pi}_1(\pi - s) \supset s \,.\, \exists p - s$. Prop 1·38 $.\!\supset\!.\ \exists p - s - \breve{\pi}(p - s)$ (2)

Hp (2) . $x\varepsilon p - s - \breve{\pi}(p - s) \,.\!\supset\!.\, \pi x \supset s$ (3)

Hp (2) . $y\varepsilon p \,.\, \pi y \supset s \,.\, \exists\pi_1 y \,.\!\supset\!.\, y\varepsilon s$ (4)

(3) . (4) $.\!\supset\!.\ \pi_1 x = \Lambda \,.\!\supset\!.\, x\varepsilon\delta p \,.\!\supset\!.$ Prop]

On a maintenant prouvé que les séries bien ordonnées qui ont des dérivées sont celles qui sont infinies sans être des progressions, c'est-à-dire :

·4 $\mathrm{P}\varepsilon\ \Omega \,.\!\supset\!:\, \exists\delta p \,.=.\, \mathrm{P}\varepsilon\Omega\ \mathrm{infin} - \omega$ [Prop 1·31·36·39 $.\!\supset\!.$ Prop]

·41 $\mathrm{P}\varepsilon\ \Omega \,.\!\supset\!:\, \delta p = \Lambda \,.=.\, \mathrm{P}\varepsilon\ \Omega\ \mathrm{fin} \cup \omega$

·42 $\omega = \Omega \cap \mathrm{P}\ni(p\varepsilon\ \mathrm{Cls\ infin} \,.\, \delta p = \Lambda)$

·43 $\omega = \Omega \cap \mathrm{P}\ni(\breve{\pi} \supset \pi \,.\, \breve{\pi}_1 = \breve{\pi})$

·44 $\omega = \Omega \cap \mathrm{P}\ni\{u \supset p \,.\!\supset\!:\, u\varepsilon\ \mathrm{Cls\ fin} \,.=.\, \exists u\breve{\pi}\}$

On pourrait prendre comme Df de ω ou bien 1·42 ou bien 1·43 ou bien 1·44.

✻ 2·1 $(P)L(P') .=. P,P'\varepsilon\mathrm{Rel} . \exists 1 \div 1 \cap S \ni (\sigma = \pi \cup \breve{\pi} . P' = \breve{S}PS)$ Df

L peut s'appeler la relation de similitude *(likeness)* entre deux relations. J'enferme les relations P et P′ en parenthèses pour distinguer une relation entre deux relations du produit relatif de trois relations. On verra (Prop 2·3) que deux séries sont semblables dans l'acceptation ordinaire de ce mot quand leur relations génératrices sont semblables dans le sens qu'on vient de définir.

·11 $P\varepsilon \mathrm{Rel} .\supset. \lambda P = \mathrm{Rel} \cap P' \ni \{(P)L(P')\}$

·12 $N_0 = \mathrm{Cls} \cap x \ni \{\exists \Omega \cap P \ni (x = \lambda P)\}$

N_0 est la classe des nombres ordinaux. Un nombre ordinal est une classe de relations bien ordonnées semblables. On a l'habitude de regarder le nombre ordinal comme une propriété commune d'une classe de séries semblables, mais il paraît qu'il n'y a pas de propriété commune excepté la classe même et la relation de similitude. Donc la Df 2·12 évite l'introduction d'une idée primitive dont on n'a nullement besoin. Puisque les propriétés de la similitude sont importantes, je vais en développer quelques unes.

$R,R'\varepsilon \mathrm{Rel} . S\varepsilon 1 \div 1 .\supset::$

·2 $x S\breve{S} y .=. x\varepsilon\sigma . x 1' y$

·21 $R' = \breve{S}RS . \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma .\supset. R = SR'\breve{S}$

[$\mathrm{Hp} .\supset: xSR'\breve{S}y .=. xS\breve{S}RS\breve{S}y .= xRy . x,y\varepsilon\sigma .=. xRy :\supset.$ Prop]

·22 $R' = \breve{S}RS . \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma .\supset. \rho'\cup\breve{\rho}' \supset \breve{\sigma}$

[Hp . Prop 2·21 $.\supset. R = SR'\breve{S} .\supset: xR'y .=. x\breve{S}SR'\breve{S}Sy .=.$
$x,y\varepsilon\breve{\sigma} . xR'y :\supset.$ Prop]

·23 $R' = \breve{S}RS . R = SR'\breve{S} .\supset. \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma . \rho'\cup\breve{\rho}' \supset \breve{\sigma}$

[$xR'y .=. x\breve{S}RSy .=. x\breve{S}SR'\breve{S}Sy .=. x,y\varepsilon\breve{\sigma} . xR'y :\supset. \rho'\cup\breve{\rho}' \supset \breve{\sigma}$ (1)
$xRy .=. xSR'\breve{S}y .=. xS\breve{S}RS\breve{S}y .=. x,y\varepsilon\sigma . xRy :\supset. \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ Prop]

·24 $R' = \breve{S}RS . \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma .=. R = SR'\breve{S} . \rho'\cup\breve{\rho}' \supset \breve{\sigma}$
[Prop 2.21·22 $.\supset.$ Prop]

·25 $R' = \breve{S}RS . \rho\cup\breve{\rho} \supset \sigma .\supset. \exists 1 \div 1 \cap S' \ni (R' = \breve{S}'RS' . \rho\cup\breve{\rho} = \sigma')$

[$\rho\cup\breve{\rho} = r : x 1'_r y .=_{x,y}. x\varepsilon r . x 1' y : S' = 1'_r S :\supset. R' = \breve{S}'RS' . \rho\cup\breve{\rho} = \sigma'$]

Cette Proposition montre que la Df 2·1 est générale, c'est-à-dire que s'il existe une relation S telle qu'on la suppose dans la Prop 2·25, il en existe toujours une telle qu'on la suppose dans la Df 2·1.

2·26 $S'\varepsilon\, 1 -\!\!+ 1 \,.\, R' = \breve{S}RS \,.\, \varrho\cup\breve{\varrho} \supset \sigma \,.\, R'' = \breve{S}'R'S' \,.\, \varrho'\cup\breve{\varrho}' \supset \sigma' \,.$

$SS' = S'' \,.\supset.\, R'' = \breve{S}''RS'' \,.\, \varrho\cup\breve{\varrho} \supset \sigma''$

[$Hp \,.\supset.\, R'' = \breve{S}'R'S' = \breve{S}'\breve{S}RSS' = \breve{S}''RS''$ (1)

$Hp \,.\, Prop\ 2{\cdot}24 \,.\supset.\, R = SR'\breve{S} \,.\, R' = S'R''\breve{S}' \,.\supset.$

$R = SS'R''\breve{S}'\breve{S} = S''R\breve{S}''$ (2) (1) . (2) . Prop 2·23 $.\supset.$ Prop]

·27 $L^2 = L$ [Prop 2·26 $.\supset.\, L^2 \supset L$ (1) $R\varepsilon Rel \,.\supset.\, (R)L(R) :\supset.\, L \supset L^2$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ Prop]

·28 $R' = \breve{S}RS \,.\, \sigma = \varrho\cup\breve{\varrho} \,.\supset.\, \breve{\sigma}' = \varrho'\cup\breve{\varrho}'$

[$Hp \,.\, Prop\ 2{\cdot}22 \supset.\, \varrho'\cup\breve{\varrho}' \supset \breve{\sigma}$ (1)

$Hp \,.\, x\breve{S}y \,.\supset.\, \exists z \ni (yRz \,.\cup.\, zRy)$ (2)

$Hp \,.\, x\breve{S}y \,.\, yRz \,.\supset.\, \exists w \varepsilon (zSw)$ (3)

$Hp \,.\, x\breve{S}y \,.\, yRz \,.\, zSw \,.\supset.\, xR'w \,.\supset.\, x\varepsilon\varrho'$ (4)

$Hp \,.\, x\breve{S}y \,.\, y\breve{R}z \,.\supset.\, \exists\, w \ni (zSw)$ (5)

$Hp \,.\, x\breve{S}y \,.\, y\breve{R}z \,.\, zSw \,.\supset.\, x\breve{R}'w \,.\supset.\, x\varepsilon\breve{\varrho}'$ (6)

(2) . (4) . (6) $.\supset.\, \breve{\sigma} \supset \varrho'\cup\breve{\varrho}'$ (7)
(1) . (7) $.\supset.$ Prop]

·29 $L = \breve{L}$ [Prop2·24·28 $.\supset.$ Prop]

·3 $P,P'\varepsilon\, Rel \,.\, \exists\, 1 -\!\!+ 1 \cap R \ni \{\varrho = \pi\cup\breve{\pi} \,.\, \breve{\varrho} = \pi'\cup\breve{\pi}' : xPy \,.\supset_{x,y}.$

$\iota\varrho xP'\iota\varrho y : xP'y \,.\supset_{x,y}.\, \iota\breve{\varrho} xP\iota\breve{\varrho} y\} \,.=.\, (P)L(P')$

[$Hp \,.=.\, \varrho = \pi\cup\breve{\pi} \,.\, \breve{\varrho} = \pi'\cup\breve{\pi}' \,.\, P \supset RP'\breve{R} \,.\, P' \supset \breve{R}PR \,.$

$=.\, \varrho = \pi\cup\breve{\pi} \,.\, \breve{\varrho} = \pi'\cup\breve{\pi}' \,.\, PR \supset RP' \,.\, RP' \supset PR \,.$

$=.\, \varrho = \pi\cup\breve{\pi} \,.\, \breve{\varrho} = \pi'\cup\breve{\pi}' \,.\, PR = RP' \,.$

$=.\, \varrho = \pi\cup\breve{\pi} \,.\, P' = \breve{R}PR :\supset.$ Prop]

Cette Prop prouve que la Df 2·1 est équivalente à la Df ordinaire de la similarité de deux séries. On montre que la relation de correspondance R fait correspondre des termes qui précèdent dans une série à des termes qui precèdent dans l'autre, et des termes qui succèdent à des termes qui succèdent; et que ceci a lieu toujours pour deux séries qui sont semblables selon la Df 2·1; mais l'idée ne s'applique pas exclusivement aux séries.

·31 $P\varepsilon\Omega \,.\supset.\, \lambda P \supset \Omega$

[$P\varepsilon\Omega \,.\, P'\varepsilon Rel \,.\, S\varepsilon\, 1 -\!\!+ 1 \,.\, p = \sigma \,.\, P' = \breve{S}PS \,.\supset::$

$x\varepsilon\, \pi - \breve{\pi} \,.=.\, \exists\breve{\pi}x \,.\, -\exists\pi x$ (1)

$xPy \,.=.\, xSP'\breve{S}y \,.=.\, \iota\breve{\sigma}xP'\iota\breve{\sigma}y$ (2)

$(2) \,.\, p = \sigma \,.\supset\therefore\, \exists\, \pi x \,.=.\, \exists\, \pi'(\breve{\sigma} x) : \exists\, \breve{\pi} x \,.=.\, \exists\, \breve{\pi}'(\breve{\sigma} x)$ (3)

$(1) \,.\, (3) \,.\supset: x \varepsilon\, \pi - \breve{\pi} \,.=.\, \imath\breve{\sigma} x\, \varepsilon\, \pi' - \breve{\pi}'$ (4)

$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{P}' \supset 0' \,.\, \mathrm{P}'^2 \supset \mathrm{P}'$ (5)

$x,y \varepsilon\, \pi' \cup \breve{\pi}' \,.\supset.\, \exists\, p \cap z \ni (z\mathrm{S}x) \,.\, \exists\, p \cap w \ni (w\mathrm{S}y)$

$x,y \varepsilon\, \pi' \cup \breve{\pi}' \,.\, z\mathrm{S}x \,.\, w\mathrm{S}y \,.\supset.\, z,w \varepsilon p \,.\supset.\, w \varepsilon\, \pi z \cup \iota z \cup \breve{\pi} z$ (6)

$(6) \,.\, \mathrm{P}' = \breve{\mathrm{S}}\mathrm{P}\mathrm{S} \,.\supset.\, y \varepsilon\, \pi' x \cup \iota x \cup \breve{\pi}' x$ (7)

$(3) : u \supset \pi \,.\, \exists\, \breve{u \pi} \,.\supset.\, \exists\, \breve{\pi} \cap x \ni (\pi x = u \cup \pi u) :\supset:$

$\breve{\sigma} u \supset \pi' \,.\, \exists\, \breve{(\breve{\sigma} u) \pi'} \,.\supset.\, \exists\, \breve{\pi}' \cap y \ni [\pi' y = \breve{\sigma} u \cup \pi'(\breve{\sigma} u)]$ (8)

$(4) \,.\, (5) \,.\, (7) \,.\, (8) \,.\supset.\, \mathrm{P}' \varepsilon\, \Omega \,.\supset.$ Prop]

En vertu de cette Prop, un nombre ordinal, tel qu'il est défini dans la Prop 2·12, est une classe composée exclusivement de relations bien ordonnées.

2·32 $(\mathrm{P})\mathrm{L}(\mathrm{P}') \,.\supset.\, \pi \cup \breve{\pi}\ \mathrm{Sim}\ \pi' \cup \breve{\pi}'$

[$(\mathrm{P})\mathrm{L}(\mathrm{P}') \,.\supset.\, \exists\, 1 \rightarrow 1 \cap \mathrm{S} \ni (\sigma = \pi \cup \breve{\pi} \,.\, \breve{\sigma} = \pi' \cup \breve{\pi}') \,.\supset.$ Prop]

·33 $\mathrm{P} \varepsilon\, \Omega\mathrm{fin} \,.\supset.\, \lambda\mathrm{P} \supset \Omega\mathrm{fin}$ [Prop 2·31·32 $.\supset.$ Prop]

·34 $\mathrm{No}\ \varepsilon\ \mathrm{Cls}'\mathrm{ClsExcl}$ [Prop 2·27·29 $.\supset.$ Prop]

$\mathrm{Cls}'\mathrm{ClsExcl} \,.=.\, \mathrm{Cls}'\mathrm{Cls} \cap u \ni (x,y \varepsilon u \,.\, x 0' y \,.\supset.\, x \cap y = \Lambda)$. Je dois cette Df à M. Whitehead. Au lieu de Cls'Cls, j'écrirai quelquefois Cls^2.

·35 $\mathrm{P} \varepsilon\, \mathrm{Rel} \,.\supset.\, \mathrm{Rel}'\mathrm{P} = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{P}' \ni (\mathrm{P}' \supset \mathrm{P})$ Df

Cette Df est analogue à celle de Cls'k [F1901, §12, P2·1]

·36 $\alpha,\beta \varepsilon\, \mathrm{No} \,.\, \exists\, \beta \cap \mathrm{P} \ni \{\exists\, \alpha \cap \mathrm{Rel}'\mathrm{P}\} \,.\supset: \mathrm{P} \varepsilon \beta \,.\supset_{\mathrm{P}}.\, \exists\, \alpha \cap \mathrm{Rel}'\mathrm{P}$

[$\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2 \varepsilon \beta \,.\, \mathrm{P} \varepsilon \alpha \,.\, \mathrm{P} \supset \mathrm{P}_2 \,.\, \mathrm{S} \varepsilon\, 1 \rightarrow 1 \,.\, \sigma = p_2 \,.\, \mathrm{P}_1 = \breve{\mathrm{S}}\mathrm{P}_2\mathrm{S} \,.\supset.\, \breve{\mathrm{S}}\mathrm{P}\mathrm{S}\ \varepsilon\ \alpha \cap \mathrm{Rel}'\mathrm{P}_1$]

✻ 3·1 $\mathrm{R}_{xy} = \imath\, \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R} \ni (\varrho = \iota x \,.\, \breve{\varrho} = \iota y)$ Df

Voir l'article précédent, §1 Prop1·8 .

·2 $\mathrm{P},\mathrm{P}' \varepsilon\, \Omega \,.\, p p' = \Lambda \,.\supset.\, \mathrm{P} + \mathrm{P}' = \mathrm{P} \cup \mathrm{P}' \cup \varepsilon\, \mathrm{R}_{pp'}\, \breve{\varepsilon}$ Df

On donne ici la Df de la somme de deux relations bien ordonnées, c'est-à-dire de deux séries bien ordonnées. La relation $\varepsilon \mathrm{R}_{pp'} \breve{\varepsilon}$ est la relation qui subsiste entre un terme quelconque de p et un terme quelconque de p'. Voir l'article précédent, §1 Prop3·8.

On a $\mathrm{P}' + \mathrm{P} = \mathrm{P} \cup \mathrm{P}' \cup \varepsilon\, \breve{\mathrm{R}}_{pp'}\, \breve{\varepsilon}$, qui est une relation différente de $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$ et en général pas semblable à $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$.

·21 $\mathrm{K} \supset \Omega \,.\supset.\, k = x \ni \{\exists\, \mathrm{K} \cap \mathrm{P} \ni (x = p)\}$ Df

·22 $\mathrm{K} \supset \Omega \,.\, k \varepsilon\, \mathrm{Cls}^2\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{Q} \varepsilon\, \Omega \,.\, q = k \,.\supset.$

$\Sigma_q \mathrm{K} = \cup'\mathrm{K} \cup \varepsilon \mathrm{Q} \breve{\varepsilon}$ Df

On donne ici la Df de la somme d'une série bien ordonnée de séries bien ordonnées. La relation $\varepsilon \breve{Q} \varepsilon$ subsiste entre deux termes de séries différentes, dont la première précède la seconde selon la relation Q.

3·23 $\mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel} . \supset : x \mathrm{E(R)} . = . x \varepsilon \varrho \cup \breve{\varrho}$ Df

·24 $\mathrm{E} \, \varepsilon \, \mathrm{Rel}$ [$u\mathrm{N}v . = . \mathrm{N} \varepsilon \mathrm{Rel} . u' 1' p \cup \breve{\varrho} . v 1' \mathrm{R} . \supset . \mathrm{E} = \varepsilon \mathrm{N} . \supset .$ Prop]

·25 $\mathrm{Cls'RelExcl} . = . \mathrm{Cls'Rel} \cap \mathrm{K} \ni \{ \mathrm{P}, \mathrm{P}' \varepsilon \mathrm{K} . (\mathrm{P}) 0' (\mathrm{P}') . \supset .$

$(\pi \cup \breve{\pi}) \cap (\pi' \cup \breve{\pi}') = \Lambda \}$ Df

·26 $\mathrm{K} \varepsilon \mathrm{Cls'Rel} . \supset . \mathrm{Cls'KExcl} = \mathrm{Cls'K} \cap \mathrm{Cls'RelExcl}$ Df

·27 $\mathrm{Q} \varepsilon \Omega . q \varepsilon \mathrm{Cls'}\Omega\mathrm{Excl} . \supset . \Sigma_{\mathrm{Q}} q = \cup ' q \cup \mathrm{EQ}\breve{\mathrm{E}}$ Df

Prop 3·27 donne une autre Df de la somme d'une série bien-ordonnée de relations bien ordonnées. Soit Q une relation bien ordonnée dont le champ se compose entièrement de relations bien ordonnées. Alors $\Sigma_{\mathrm{Q}} q$ est une relation qui subsiste entre deux termes x et y, si les deux ont une relation de la classe q, ou si x appartient au champ d'une relation qui a la relation Q avec une relation au champ de laquelle appartient y. Cette Df est en général plus simple que la Df 3·22, mais toutes les deux se trouvent utiles. Pour obtenir la première de la seconde, on n'a qu'à substituer à Q la relation correspondante entre les champs des termes de q, relation qui est semblable à Q.

·28 $\mathrm{Q} \varepsilon \Omega . q \varepsilon \mathrm{Cls'}\Omega\mathrm{Excl} . \mathrm{S} \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \sigma = q . \mathrm{Q}' = \breve{\mathrm{S}}\mathrm{QS} .$

$q' \varepsilon \mathrm{Cls'RelExcl} . \mathrm{S} \supset \mathrm{L} . \supset . \Sigma_{\mathrm{Q}'} q \, \varepsilon \, \lambda \Sigma_{\mathrm{Q}'} q'$

[$\mathrm{P} \varepsilon q . \supset_{\mathrm{P}} . \mathrm{S}_p \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \sigma_p = p . \iota \breve{\sigma} \mathrm{P} = \breve{\mathrm{S}}_p \mathrm{PS}_p : \mathrm{S}_q = x \ni \{ \exists \, q \cap \mathrm{P} \ni (x = \mathrm{S}_p) \} .$

$s_q = y \ni \{ \exists \, q \cap \mathrm{P} \ni (y = \sigma_p \cup \breve{\sigma}_p) \} . \cup ' \mathrm{S}_q = \mathrm{S}' . \supset .\because$

$s_q \, \varepsilon \, \mathrm{Cls^2Excl} . \mathrm{S}' \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \supset . \breve{\mathrm{S}}'(\cup ' q)\mathrm{S}' \, \varepsilon \, \lambda (\cup ' q) :$ (1)

$\mathrm{EQ}' \breve{\mathrm{E}} = \breve{\mathrm{S}}' \mathrm{EQ} \breve{\mathrm{E}} \mathrm{S}' :$ (2)

$(1) . (2) . (\cup ' q) \cap \mathrm{EQ}\breve{\mathrm{E}} = \Lambda . \supset . \Sigma_{\mathrm{Q}'} q' = \breve{\mathrm{S}}' \Sigma_{\mathrm{Q}} q \mathrm{S}' . \supset .$ Prop]

Dans cette proposition on prouve que les sommes de deux séries semblables de séries semblables sont deux séries semblables. La preuve peut s'appliquer à des séries qui ne sont pas bien ordonnées.

·29 $\mathrm{K} \supset \Omega . k \varepsilon \mathrm{Cls^2Excl} . \mathrm{R} \varepsilon \Omega . r = k . \supset . \Sigma_r \mathrm{K} \, \varepsilon \Omega$

[$\Sigma r \mathrm{K} = \mathrm{T} . \supset .\because.$

$x, y \varepsilon \cup ' k . \supset :: \mathrm{P} \varepsilon \mathrm{K} . x, y \varepsilon p . \supset : x\mathrm{P}y . \cup . y\mathrm{P}x . \cup . x 1' y :$

$\supset : x\mathrm{T}y . \cup . y\mathrm{T}x . \cup . x1'y .\because.$ (1)

$p, p' \varepsilon k . p 0' p' . x \varepsilon p . y \varepsilon p' . \supset : p\mathrm{R}p' . \cup . p'\mathrm{R}p : \supset : x\mathrm{T}y . \cup . y\mathrm{T}x$ (2)

$\mathrm{T} \supset 0' . \mathrm{T}^2 \supset \mathrm{T}$ (3)

$p_0 = \iota \varrho - \breve{\varrho} . x_0 = \iota \pi_0 - \breve{\pi}_0 . \supset . x_0 = \iota \tau - \breve{\tau}$ (4)

$u \supset t \,.\, \exists \breve{u\tau} \,.\, \exists \breve{\varrho} - \varrho : p = \iota \breve{\varrho} - \varrho \,.\supset.\, \exists u \frown p :\supset.\, \breve{u\tau} = (\breve{u \frown p})\pi \,.$

$\supset.\, \exists \breve{\tau} \cap x \ni (\tau x = u \cup \tau u)$ (5)

$u \supset t \,.\, \exists \breve{u\tau} \,.\, k_u = k \cap p \ni (\exists u \cap p) \,.\, \exists \breve{\varrho} k_u \,.\supset.$
$\exists k \cap p_u \ni (\varrho p_u = k_u \cup \varrho k_u)$ (6)

$(6) \,.\, -\exists \cup\text{‘}k \cap \breve{u\tau} \cap p_u \,\tau \,.\supset.\, \iota \pi_u - \breve{\pi}_u \,\varepsilon\, x \ni (\tau x = u \cup \tau u)$ (7)

$(6) \,.\, \exists \cup\text{‘}k \cap \breve{u\tau} \cap p_u \,\tau \,.\supset.\, \exists \varrho_1 p_u \,.\, \cup\text{‘}k \cap \breve{u\tau} \cap p_u \,\tau \supset \iota \varrho_1 p_u \,.$

$\supset.\, \exists\text{'} \varrho_1 p_u \cap x \ni (\tau x = u \cup \tau u)$ (8)

$(1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\, (4) \,.\, (5) \,.\, (7) \,.\, (8) \,.\supset.$ Prop]

On prouve ici que la somme d'une série bien ordonnée de séries bien ordonnées est elle-même une série bien ordonnée. Il faut remarquer que $\iota\varrho_1 p_u$, qui paraît dans (8), est la série qui précède immédiatement p_u, d'après la Df 1·23.

3·3 $\mathrm{K} \varepsilon\, \mathrm{Cls}\text{'}\Omega \,.\, k \varepsilon\, \mathrm{Cls}^2\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{R} \varepsilon \Omega \,.\, r = k \,.\supset.$
$\sum_{\mathrm{R}}^{\mathrm{P}\varepsilon\mathrm{K}} \lambda \mathrm{P} = \iota \mathrm{No} \cap x \ni (\Sigma_r \mathrm{K}\ \varepsilon x)$ Df

·31 $\mathrm{Q} \varepsilon \Omega \,.\, q \varepsilon\, \mathrm{Cls}\text{'}\Omega\mathrm{Excl} \,.\supset.\, \sum_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}\varepsilon q} \lambda \mathrm{P} =$
$\iota \mathrm{No} \cap x \ni (\Sigma_{\mathrm{Q}}\, q\ \varepsilon x)$ Df

·32 Hp3 ·28 $.\supset.\, \sum_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}\varepsilon q} \lambda \mathrm{P} = \sum_{\mathrm{Q}'}^{\mathrm{P}'\varepsilon q'} \lambda \mathrm{P}'$ [Prop3·28 $.\supset.$ Prop]

Les Df 3·3·31 dépendent de 3·28·29. Elles définissent une somme de nombres ordinaux dans un ordre donné. On ne peut pas transformer ces Df en Df de la somme d'une classe donnée de nombres ordinaux dans un ordre donné, puisqu'alors le même nombre ordinal ne saurait être répété. Il faut donc définir les nombres comme nombres de telles et telles séries. Cette restriction reste jusqu'à ce qu'on ait défini la multiplication. Voir l'article précédent, §2, Prop4·2, Note.

·33 $\alpha,\beta \varepsilon \mathrm{No} \,.\supset.\, \alpha + \beta = \iota \mathrm{No} \cap \gamma \ni \{\mathrm{P} \varepsilon \alpha \,.\, \mathrm{Q} \varepsilon \beta \,.\, pq = \Lambda \,.\supset.$
$\mathrm{P} + \mathrm{Q}\ \varepsilon \gamma\}$ Df

·34 $\alpha,\beta \varepsilon \mathrm{No} \,.\, \mathrm{K} \supset \alpha \,.\, k \varepsilon \mathrm{Cls}^2\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{Q},\mathrm{Q}' \varepsilon \beta \,.\, q = q' = k \,.\supset.$
$\Sigma_q \mathrm{K}\ \varepsilon\ \lambda \Sigma_{q'} \mathrm{K}$ [Prop3·32 $.\supset.$ Prop]

·4 $\alpha,\beta \varepsilon \mathrm{No} \,.\supset.\, \alpha\beta = \alpha \times \beta = \iota \mathrm{No} \cap \gamma \ni \{\mathrm{K} \supset \alpha \,.\, k \varepsilon \mathrm{Cls}^2\mathrm{Excl} \,.$
$\mathrm{Q} \varepsilon \beta \,.\, q = k \,.\supset.\, \Sigma_q \mathrm{K}\ \varepsilon \gamma\}$ Df

·41 $\alpha,\beta \varepsilon \mathrm{No} \,.\supset.\, \alpha\beta = \alpha \times \beta = \iota \mathrm{No} \cap \gamma \ni \{\mathrm{Q} \varepsilon \beta \,.$
$q \varepsilon \mathrm{Cls}\text{'}\alpha\ \mathrm{Excl} \,.\supset.\, \Sigma_{\mathrm{Q}}\, q\ \varepsilon \gamma\}$

L'équivalence de 3·4 et 3·41 résulte de la note à la Prop 3·27. On affirme dans 3·4 que le produit de deux nombres ordinaux α,β est le nombre d'une série qui est la somme d'une série de séries qui a le nombre β et dont les termes sont des séries ayant le nombre α.

✻ 4. On va maintenant prouver que toute série bien ordonnée est composée de progressions suivies d'un nombre fini de termes. Le nombre des progressions, ou des termes qui succèdent à toutes les progressions, peut être nul.

$\cdot 1 \quad P, P' \varepsilon \Omega \,.\, pp' = \Lambda \,.\, P + P' = R \,.\, \exists \breve{\pi} - \pi \,.\supset.\, \delta r = \delta p \cup \delta p'$

$[\; R = P \cup P' \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon} \,.\supset.\, R^2 = (P \cup P' \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon})(P \cup P' \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon})$

$= P^2 \cup P'^2 \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon} P' \cup P \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon} \qquad (1)$

$(1) \,.\, \breve{\pi} - \pi = \iota x \,.\, \pi' - \breve{\pi}' = \iota y \,.\supset.$

$R_1 = R \frown - R^2 = (P \cup P' \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon}) \frown - (P^2 \cup P'^2 \cup \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon} P' \cup P \varepsilon R_{pp'} \breve{\varepsilon})$

$= P_1 \cup P'_1 \cup R_{xy} \qquad (2)$

$(2) \,.\supset.\, \breve{\varrho}_1 = \breve{\pi}_1 \cup \breve{\pi}_1' \cup \pi' - \breve{\pi}' \qquad (3)$

$(3) \,.\supset.\, \delta r = \breve{\varrho} - \breve{\varrho}_1 = \breve{\pi} - \breve{\pi}_1 \cup \breve{\pi}' - \breve{\pi}'_1 \,.\supset.\, \mathrm{Prop} \;]$

$\cdot 11 \quad P, P' \varepsilon \Omega \,.\, pp' = \Lambda \,.\, P + P' = R \,.\, \breve{\pi} \supset \pi \,.\supset.$

$\delta r = \delta p \cup \delta p' \cup \pi' - \breve{\pi}'$

$[\; \breve{\pi} \supset \pi \,.\supset.\, R_1 = P_1 \cup P'_1 \qquad (1)$

$(1) \,.\supset.\, \breve{\varrho}_1 = \breve{\pi}_1 \cup \breve{\pi}'_1 \,.\supset.\, \breve{\varrho} - \breve{\varrho}_1 = \delta p \cup \delta p' \cup \pi' - \breve{\pi}' \,.\supset.\, \mathrm{Prop} \;]$

Ces deux propositions prouvent que la dérivée de la somme de deux séries bien ordonnées, dont la première a un dernier terme, est la somme de leurs dérivées, mais que si la première série n'a pas de dernier terme, il faut ajouter le premier terme de la seconde série. Le théorème s'applique aussi à une série de séries :

$\cdot 12 \quad K \supset \Omega \,.\supset. \delta k = x \ni \{ \exists K \frown P \ni (x = \delta p) \} \qquad \mathrm{Df}$

$\cdot 13 \quad K \varepsilon \, \mathrm{Cls}'\Omega\mathrm{Excl} \,.\, Q \varepsilon \Omega \,.\, q = k \,.\, R = \Sigma_q K \,.\supset.\, \delta \Sigma_q k = \delta r \qquad \mathrm{Df}$

$\cdot 14 \quad K \varepsilon \, \mathrm{Cls}'\Omega\mathrm{Excl} \,.\, Q \varepsilon \Omega \,.\, q = k : P \varepsilon K \,.\supset_P.\, \exists \breve{\pi} - \pi :\supset.$

$\delta \Sigma_q k = \cup \text{‘} \delta k \cup x \ni \{ \exists \delta q \frown p \ni (x = \iota \pi - \breve{\pi}) \}$

$\cdot 15 \quad K \varepsilon \, \mathrm{Cls}'\Omega\mathrm{Excl} \,.\, R \varepsilon \Omega \,.\, r = k \,.\, K' = K \frown P \ni (\breve{\pi} \supset \pi) \,.\supset.$

$\delta \Sigma_q k = \cup \text{‘} \delta k \cup x \ni \{ \exists \breve{\varrho}_1 k' \frown P' \ni (x = \iota \pi' - \breve{\pi}') \} \cup x \ni \{ \exists \delta r \frown p \ni (x = \iota \pi - \breve{\pi}) \}$

Les preuves de 4·14·15 sont semblables à celles de 4·1·11.

$\cdot 16 \quad R \varepsilon \mathrm{Rel} \,.\, u \supset \varrho \cup \breve{\varrho} \,.\supset:\, x R_{uu} y \,.=.\, x, y \varepsilon u \,.\, x R y \qquad \mathrm{Df}$

$\cdot 17 \quad \omega + 1 = \Omega \frown P \ni \{ \exists \breve{\pi} - \pi \,.\, P_{\pi\breve{\pi}} \varepsilon \omega \} \qquad \mathrm{Df}$

$\cdot 18 \quad K \supset \omega + 1 \,.\, Q \varepsilon \Omega \,.\, q = k \,.\supset.\, \delta \Sigma_q k = x \ni \{ \exists K \frown P \ni (x = \iota \breve{\pi} - \pi) \}$

$\cup x \ni \{ \exists \delta q \frown p \ni (x = \iota \pi - \breve{\pi}) \}$

[Prop 1·37·39 . 4·14 .⊃. Prop]

4·19 $K \supset \omega \,.\, R\varepsilon\Omega \,.\, r = k \,.\supset.\, \delta\Sigma_r k = x \ni \{\exists \breve{\varrho} \cap p \ni (x = \iota\pi - \breve{\pi})\}$

[Prop 1·37 . 4·15 $.\supset.$ Prop]

·2 $P\varepsilon\Omega \,.\supset.\, P^{(1)} = P_{\delta p \delta p}$ Df

$P^{(1)}$ est la relation P restreinte aux termes de la première dérivée δp.

·21 $P\varepsilon\Omega \,.\, \exists P^{(1)} \,.\supset.\, P^{(1)}\varepsilon\Omega$

[$P^{(1)} \supset P \,.\supset.\, P^{(1)} \supset 0'$ (1) $\quad \mid P^{(1)} \mid^2 \supset P^{(1)}$ (2)

$x,y\varepsilon\delta p \,.\supset:\, xPy \,.\cup.\, x\breve{P}y \,.\cup.\, x1'y \,:\supset:$

$xP^{(1)}y \,.\cup.\, x\breve{P}^{(1)}y \,.\cup.\, x1'y$ (3)

Hp . Prop 1·38 $.\supset.\, \exists \delta p - \breve{\pi}(\delta p) \,.\supset.\, \exists \pi^{(1)} - \breve{\pi}^{(1)}$ (4)

$u \supset \delta p \,.\, \exists u\breve{\pi}^{(1)} \,.\supset.\, \exists \breve{\pi} \cap x \ni (\pi x = u \cup \pi u) \,.\, \exists \breve{\pi}^{(1)} \cap y \ni (u \supset \pi^{(1)} y)$ (5)

(5) . Prop 1·38 . $\breve{\pi}^{(1)} \cap y \ni (u \supset \pi^{(1)} y) = v \,.\supset.\, \exists v - \breve{\pi} v$ (6)

Hp (6) . $z = v - \breve{\pi} v \,.\supset.\, \pi^{(1)} z = u \cup \pi^{(1)} u$ (7)

(1) . (2) . (3) . (4) . (7) $.\supset.$ Prop]

·22 $P\varepsilon\Omega \,.\, xP_1^{(1)}y \,.\, \breve{\pi}x \cap \pi y = v \,.\supset.\, P_{vv}\,\varepsilon\omega$

$P_1^{(1)} = P^{(1)} \cap - \mid P^{(1)} \mid^2$, d'après la Df 1·23 .

[$\pi x \cup \iota x = u \,.\, \iota y \cup \breve{\pi} y = w \,.\supset.\, P = P_{uu} + P_{vv} + P_{ww}$ (1)

(1) Prop 4·15 $.\supset.\, \delta p = \delta p_{uu} \cup \delta p_{vv} \cup \iota y \cup \delta p_{ww}$ (2)

(2) . $xP_1^{(1)}y \,.\supset.\, \delta p_{vv} = \Lambda$ (3) $\quad$ (3) Prop 1·41 $.\supset.\, P_{vv}\,\varepsilon\Omega\mathrm{fin} \cup \omega$ (4)

$y\varepsilon\delta p \,.\supset.\, \pi_1 v \supset v \,.\supset.\, v\varepsilon\mathrm{Cls\ infin}$ (5) $\quad$ (4) . (5) $.\supset.$ Prop]

On vient de prouver que la partie d'une série bien ordonnée qui se trouve entre deux termes consécutifs de la première dérivée est une progression. On a de même

·23 $P\varepsilon\Omega \,.\, \exists\delta p \,.\, v = (\delta p)\pi \,.\supset.\, P_{vv}\varepsilon\omega$

c'est-à-dire, les termes qui précèdent le premier terme de la dérivée forment une progression. Aussi

·24 $P\varepsilon\Omega \,.\, \exists\delta p \,.\, w = (\delta p)\breve{\pi} \,.\supset.\, P_{ww}\varepsilon\omega \cup \Omega\mathrm{fin} \cup \iota\Lambda$

[$v = \pi w \,.\supset.\, P = P_{vv} + P_{ww} \,.\supset.\, \delta p = \delta p_{vv} \cup \delta p_{ww} \,.\supset.\, \delta p_{ww} = \Lambda$ (1)

(1) . Prop1·41 $.\supset.$ Prop]

·25 $x\varepsilon\mathrm{No} \,.\supset.\, x+1 = \Omega \cap P \ni (\exists\breve{\pi} - \pi \,.\, P_{\pi\pi}\varepsilon x)$ Df

·26 $P\varepsilon\Omega \,.\, x\varepsilon\mathrm{No} \,.\, n\varepsilon\mathrm{No\ fin} \cup \iota\omega \,.\, P^{(1)}\varepsilon x : w = (\delta p)\breve{\pi} \,.\supset.$
$P_{ww}\,\varepsilon n \,:\supset.\, P\varepsilon\omega \times x + n + 1$

[Prop3·4 . 4·22·23·24·25 $.\supset.$ Prop]

·27 $P, P'\varepsilon\Omega \,.\, (\delta p)\breve{\pi}\,\mathrm{sim}\,(\delta p')\breve{\pi}' \,.\, P^{(1)}\varepsilon\lambda P'^{(1)} \,.\supset.\, P\varepsilon\lambda P'$

[Prop4·26 $.\supset.$ Prop]

4·28 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega \,.\, p\mathrm{-}(\delta p)\breve{\pi}=u \,.\, p'\mathrm{-}(\delta p)\breve{\pi}'=u' \,.\, \mathrm{P}uu\varepsilon\lambda\mathrm{P}'u'u' .\supset.$
$\mathrm{P}(1)\varepsilon\lambda\mathrm{P}'(1)$ [Prop4·26 $.\supset.$ Prop]

✻ 5. Il faut maintenant considérer les segments des séries bien ordonnées, par le moyen desquelles on prouve que, de deux nombres ordinaux différents, l'un doit être plus grand que l'autre. (Il importe d'observer qu'on ne sait pas démontrer le théorème analogue pour les nombres cardinaux). Les théorèmes de ce numéro, ainsi que les démonstrations que nous allons en donner, se trouvent presque tous chez Cantor, Mathematische Annalen 49, § 13. Nous les reproduisons pour montrer comment on leur donne une expression symbolique.

·1 $\mathrm{P}<\mathrm{P}' .=, \mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega \,.\, \mathrm{P}\mathrm{-}\varepsilon\lambda\mathrm{P}' \,.\, \exists\, \lambda\mathrm{P}\frown\mathrm{Rel}'\mathrm{P}'$ Df

Pour la Df de Rel'P', voir 2·35

·11 $\mathrm{P}>\mathrm{P}' .=. \mathrm{P}'<\mathrm{P}$ Df

·12 $\mathrm{P}\leqq\mathrm{P}' .=. \mathrm{P}'\geqq\mathrm{P} .=: \mathrm{P}<\mathrm{P}' \,.\cup.\, \mathrm{P}\varepsilon\lambda\mathrm{P}'$ Df

·13 $x\mathrm{M}y .=. x,y\varepsilon\mathrm{No} \,.\, x\mathrm{-}=y \,.\, \exists y\frown\mathrm{P}\ni\{\exists x\frown\mathrm{Rel}'\mathrm{P}\}$ Df

Il est nécessaire d'employer un symbole différent pour *moindre* entre relations et entre nombres ordinaux. M signifie *moindre que* parmi les nombres ordinaux. On observera que μx signifie « nombre moins que x », $\breve{\mu}_1(\mu x)$ signifie « successeur immédiat d'un nombre moins que x », c'est-à-dire, $\mu x\cup x$ si x a un prédécesseur immédiat, et μx si x n'a pas de prédécesseur immédiat.

·14 $x\mathrm{M}y .=: x,y\varepsilon\mathrm{No} \,.\, x\frown y=\Lambda : \mathrm{P}\varepsilon y .\supset_{\mathrm{P}}.\, \exists x\frown\mathrm{RelP}$
[Prop2·34·36 $.\supset.$ Prop]

·15 $x\mathrm{M}y .=: x,y\varepsilon\mathrm{No} : \mathrm{P}\varepsilon x \,.\, \mathrm{Q}\varepsilon y .\supset_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}.\, \mathrm{P}<\mathrm{Q}.$

·2 $\mathrm{P}\varepsilon\Sigma .\supset. \varsigma p = \mathrm{Cls}'p\frown u\ni(\exists u \,.\, \exists u\breve{\pi} \,.\, \pi u\supset u)$ Df

·21 $\mathrm{Sgm}p = \mathrm{Cls}'p\frown u\ni(\exists u \,.\, \exists u\breve{\pi} \,.\, \pi u = u)$ Df

La première de ces Df donne des segments qui peuvent avoir un dernier terme; la seconde donne des segments qui n'ont pas de dernier terme. La seconde Df est la Df générale de la première dérivée d'une série, car la Df habituelle présuppose sans raison l'existence d'une limite pour toute série convergente, c'est-à-dire pour toute série qui a des successeurs sans qu'elle ait un dernier terme. Pour éviter cette erreur, qui est commise par tous les auteurs que nous connaissons, il est nécessaire, pour les séries générales, de définir la première dérivée comme la classe Sgm$p$.

$P \varepsilon \Omega \,.\!\supset\!::$

5·22 $u \supset p \,.\, \exists u \breve{\pi} \,.\!\supset\!.\, \mathrm{seq}\, u = \eta p \frown x \ni (\pi x = u \cup \pi u)$ Df

·23 $u \varepsilon \varsigma p \,.\!\supset\!.\, \mathrm{seq}\, u = \eta p \frown x \ni (\pi x = u)$ [Prop 5·2 $.\!\supset\!.$ Prop]

·24 $x \varepsilon \breve{\pi} \,.\!\supset\!.\, \pi x \,\varepsilon\, \varsigma p$ [$P^2 \supset P \,.\!\supset\!.$ Prop]

·25 $x S_p u \,.\!=\!.\, x \varepsilon \breve{\pi} \,.\, u = \pi x$ Df

·26 $S_p \varepsilon 1 \rightarrow 1 \,.\, \sigma_p = \breve{\pi} \,.\, \breve{\sigma}_p = \varsigma p$

·27 $u T_p v \,.\!=\!.\, u, v \varepsilon \varsigma p \,.\, u \supset v \,.\, \exists v - u$ Df

La relation T_p est la relation *moindre que* parmi les segments de p.

·28 $T_p = \breve{S}_p P S_p$ [Prop 5·25·26·27 $.\!\supset\!.$ Prop]

·29 $T_p \varepsilon \lambda P \breve{\pi} \breve{\pi}$ [Prop 5·26·28 $.\!\supset\!.$ Prop]

Il s'ensuit que la classe des segments forme une série semblable à la série originale sans son premier terme. Si la série est infinie, la série des segments sera donc semblable à la série originale.

5·3 $P \varepsilon \Omega \,.\, S \varepsilon 1 \rightarrow 1 \,.\, \sigma = p \,.\, P' = \breve{S} P S \,.\!\supset\!\therefore$

$u \varepsilon \varsigma p \,.\!=\!.\, \breve{\sigma} u \,\varepsilon\, \varsigma p' : u = \pi y \,.\!=\!.\, \breve{\sigma} u = \pi' (\breve{\sigma} y)$

[$x P y \,.\!=\!.\, \iota \breve{\sigma} x P' \iota \breve{\sigma} y :\supset: x \varepsilon \pi y \,.\!=\!.\, \iota \breve{\sigma} x \,\varepsilon\, \pi' (\breve{\sigma} y) :\supset.$ Prop]

Cette proposition prouve que si deux séries sont semblables, la relation de correspondance S fait correspondre des segments à des segments, et le successeur d'une classe au successeur de la classe correspondante.

·31 $P, P' \varepsilon \Omega \,.\, P' \supset \breve{P} \,.\!\supset\!.\, P' \varepsilon \Omega\, \mathrm{fin}$

[Hp . Prop 1·38 $.\!\supset\!: u \supset p' \,.\!\supset_u.\, \exists\, u - \pi' u$ (1)

(1) . Prop 1·41·43 . 4·24 $.\!\supset\!.$ Prop]

Cette proposition prouve que toute série descendante bien ordonnée qui est contenue dans une série bien ordonnée doit être finie.

·32 $P \varepsilon \Omega \,.\, u \varepsilon \varsigma p \,.\!\supset\!.\, P_{uu} < P$

[Hp $.\!\supset\!.\, P_{uu} \supset P$ (1)

$P_{uu} \varepsilon \lambda P \,.\!\supset\!.\, \exists\, 1 \rightarrow 1 \frown S \ni (\sigma = u \,.\, \breve{\sigma} = p \,.\, P = \breve{S} P_{uu} S$ (2)

$S \varepsilon 1 \rightarrow 1 \,.\, \sigma = u \,.\, \breve{\sigma} = p \,.\, P = \breve{S} P_{uu} S$. Prop 5·3 $.\!\supset\!.\, \sigma u \,\varepsilon\, \varsigma u \,.\!\supset\!.\, \sigma u \,\varepsilon\, \varsigma p$ (3)

$Nc' \sigma u = Nc' u$. Induct $.\!\supset\!: v \varepsilon$ No fin $.\!\supset_v.\, .\, \exists \sigma^v u$ (4)

(3) . Induct . (4) $.\!\supset\!: v \varepsilon$ No fin $.\!\supset_v.\, \sigma^v u \,\varepsilon\, \varsigma p$ (5)

Hp (3) $.\, \exists\, p - u \,.\!\supset\!.\, \exists\, u - \sigma v$ (6)

(6) . Induct . $v \varepsilon$ No fin $.\!\supset\!.\, \exists\, \sigma^v u - \sigma^{v+1} u$ (7)

(7) : $v \varepsilon$ No fin $.\!\supset_v.\, x_v = \mathrm{seq}\, \sigma^v :: x P' y \,.\!=\!\therefore \exists$ No fin $\frown v \varepsilon (x 1' x_v)$.

$\exists$ No fin $\frown v' \ni (y 1' x_{v'}) : x 1' x_v \,.\, y 1' x_{v'} \,.\!\supset\!.\, v M v' ::\supset.\, P' \supset \breve{P} \,.\, P' \varepsilon \omega$ (8)

(8) $.\!\supset\!.$ $-$Prop5·31 (9) (9) . Prop5·31 $.\!\supset\!.\, P_{uu} - \varepsilon \lambda P$ (10)

(1) . (10) $.\!\supset\!.$ Prop]

5·33 $P\varepsilon\Omega . u,u'\varepsilon\varsigma p . u -= u' . u\supset u' .\supset. P_{uu} < P_{u'u'}$

[$u\varepsilon\, \varsigma p_{u'u'}$. Prop5·32 .$\supset$. Prop]

·34 $P\varepsilon\Omega . u\varepsilon\varsigma p . v\supset u .\supset. P_{vv} < P$

[$P_{vv}\varepsilon\, \lambda P . S\varepsilon\, 1\text{-}{+}1 . \sigma = p . \breve\sigma = p_{vv} . P_{vv} = \breve{S}PS . v_{N} = x\ni$

$\{ \exists No\ fin \cap \nu\ni(x = \sigma^{\nu} v) \}$. Prop5·3 . Induct .$\supset$. $v_{N}\supset \varsigma p_{vv}$ (1)

(1) . Prop5·26 .$\supset$. $\sigma p\ v_{N}\supset p_{vv}$ (2)

(2) : $\nu > \nu' .\supset_{\nu,\nu'} \iota\, \sigma(\sigma p^{\nu} v) P \iota\sigma\ (\sigma^{\nu'} v) :\supset.$ -Prop5·31 (3)

(3) . Prop5·31 .$\supset$. $P_{vv} -\varepsilon\, \lambda P$.$\supset$. Prop]

·35 $P\varepsilon\Omega . S,S'\varepsilon\, 1\text{-}{+}1 . \sigma = \sigma' = p . \breve{S}PS = \breve{S}'PS' .\supset. S = S'$

[$P' = \breve{S}PS . P'' = \breve{S}'PS'$. Prop2·29 .$\supset$. $\breve\sigma = p' = p'' = \breve\sigma'$ (1)

(1) . $x\varepsilon p . y = \iota\breve\sigma x . z = \iota\breve\sigma' x$. Prop5·3 .$\supset$. $z\varepsilon p' . P'_{\pi'z\pi'z}\ \varepsilon\, \lambda P_{\pi x\pi x}$.

$P'_{\pi'y\pi'y}\ \varepsilon\, \lambda P_{\pi x\pi x} .\supset. P'_{\pi'z\pi'z}\ \varepsilon\, \lambda P'_{\pi'y\pi'y}$ (2)

(2) . Prop5·33 .$\supset$. $y 1' z$.$\supset$. Prop]

·36 $P,P'\varepsilon\Omega . u\varepsilon\varsigma p .\supset. \varsigma p' \cap v\ni(P'_{vv}\ \varepsilon\, \lambda P_{uu})\ \varepsilon$ Elm $\cup\, \iota\Lambda$

[$v,v'\varepsilon\varsigma p' . P'_{vv}\ \varepsilon\, \lambda P_{uu} . P'_{v'v'}\ \varepsilon\, \lambda P_{uu} .\supset. P'_{vv}\ \varepsilon\, \lambda P'_{v'v'}$ (1)

(1) . Prop5·33 .$\supset$. Prop]

·37 $P,P'\varepsilon\Omega . u\varepsilon\, \varsigma p . u'\varepsilon\, \varsigma p' . P_{uu}\ \varepsilon\, \lambda P_{u'u'} . v\varepsilon\, \varsigma p . v\supset u .\supset.$

$\varsigma p' \cap v'\ni(P'_{v'v'}\ \varepsilon\, \lambda P_{vv})\ \varepsilon$ Elm

[Prop5·3·36 .$\supset$. Prop]

·38 $P,P\varepsilon\Omega . u,v\varepsilon\, \varsigma p . u',v'\varepsilon\, \varsigma p' . P_{uu}\ \varepsilon\, \lambda P'_{u'u'}$.

$P_{vv}\ \varepsilon\, \lambda P'_{v'v'} . u\supset v .\supset. u'\supset v'$

[Prop5·33·37 .$\supset$. Prop

·39 $P,P'\varepsilon\Omega . u,v\varepsilon\, \varsigma p . u\supset v . \varsigma p' \cap u'\ni(P'_{u'u'}\ \varepsilon\, \lambda P_{uu}) = \Lambda .\supset.$

$\varsigma p' \cap v'\ni(P'_{v'v'}\ \varepsilon\, \lambda P_{vv}) = \Lambda . P' -\varepsilon\, \lambda P$

[Prop5·32·37 . Transp .$\supset$. Prop]

5·4 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\supset.\, \varsigma\mathrm{P} = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{P}'\ni\{\exists\, \varsigma p \cap u\ni(\mathrm{P}' = \mathrm{P}_{uu})\}$ Df

·41 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\supset.\, \cup'\varsigma p = \pi$ [$\exists u \,.\, \exists u\breve{\pi} \,.\, u\supset\pi \,.\supset.\, u \cup \pi u \;\varepsilon\; \varsigma p \,.\supset.$ Prop]

·42 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\supset.\, \cup'\varsigma\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\pi\pi}$ [Prop5·4·41 $.\supset.$ Prop]

·43 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \mathrm{R},\mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset:\, \mathrm{R}<\mathrm{R}' \,.=.\, \mathrm{seq}r \;\mathrm{P}\; \mathrm{seq}r' \,.=.\, r\mathrm{T}_p r'$
(Prop5·28·33 $.\supset.$ Prop]

·44 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega : \mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} : \mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}'}.$
$\exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' :\supset.\, \mathrm{P}\, \varepsilon\lambda\mathrm{P}$

[Hp . Prop5·36 $.\supset.\, 1\text{-+}1 \cap \mathrm{S}\ni\{\sigma = \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \sigma = \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \mathrm{S}\supset\mathrm{L}\}\, \varepsilon\, \mathrm{Elm}$ (1)

$\mathrm{S}\varepsilon\, 1\text{-+}1 \,.\, \sigma = \varsigma\mathrm{P} \,.\, \breve{\sigma} = \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \mathrm{S}\supset\mathrm{L} \,.\supset:\, \mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\, \mathrm{R}_1<\mathrm{R}_2 \,.$

Prop5·38·43 $.\supset.\, \mathrm{seq}r_1 \;\mathrm{P}\; \mathrm{seq}r_2 \,.\, \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_1 < \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_2$ (2)

Prop 5·43 . (2) $.\, \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}'_1 \,.\, \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}'_2 \,.\supset.\, \mathrm{seq}r'_1 \;\mathrm{P}'\; \mathrm{seq}r_2'$ (3)

$\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\, \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}'_1 \,.\, \iota\breve{\sigma}\mathrm{R}_2 = \mathrm{R}'_2 \,.\, \mathrm{R}'_1<\mathrm{R}'_2 \,.\supset.\, \mathrm{seq}r_1 \;\mathrm{P}\; \mathrm{seq}r_2$ (4)

(2) . (3) . (4) . Prop2·3 . 5·29 $.\supset.\, \mathrm{P}_{\breve{\pi}\breve{\pi}} \;\; \varepsilon\lambda\mathrm{P}'_{\breve{\pi}'\breve{\pi}'}$ (5)

(5) $.\, \pi\text{-}\breve{\pi},\pi'\text{-}\breve{\pi}'\; \varepsilon\; \mathrm{Elm} \,.\supset.$ Prop]

·45 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega : \mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} :\exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \mathrm{R}'\ni(\varsigma\mathrm{P}\cap\lambda\mathrm{R}' = \Lambda) :\supset.$
$\exists\varsigma\mathrm{P}'\cap\mathrm{R}''\ni(\mathrm{P}\varepsilon\lambda\mathrm{R}'')$

[Prop 1·38 . 5·39·43 $.\supset.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \mathrm{R}''\ni\{\varsigma\mathrm{P}\cap\lambda\mathrm{R}'' = \Lambda : \mathrm{R}\varepsilon\varsigma\mathrm{P}' \,.\, \mathrm{R}<\mathrm{R}'' \,.\supset_{\mathrm{R}}.$
$\exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R} : \mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \mathrm{R}'>\mathrm{R}'' \,.\supset_{\mathrm{R}'}.\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' = \Lambda\}$
$\mathrm{R}''\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}'' = \Lambda : \mathrm{R}\varepsilon\varsigma\mathrm{P}' \,.\, \mathrm{R}<\mathrm{R}'' \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R} : \mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P}' \,.$
$\mathrm{R}'>\mathrm{R}'' \,.\supset_{\mathrm{R}'}.\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' = \Lambda :\supset: \mathrm{P},\mathrm{R}''\, \varepsilon\Omega : \mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{R}'' \cap \lambda\mathrm{R} :$
$\mathrm{R}'''\varepsilon\, \varsigma\mathrm{R}'' \,.\supset_{\mathrm{R}'''}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}'''$ (1)
(1) . Prop 5·44 $.\supset.\, \mathrm{P}\varepsilon\lambda\mathrm{R}'' \,.\supset.$ Prop]

·46 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega \,.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \mathrm{R}'\ni(\varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' = \Lambda) \,.\supset:$
$\mathrm{R}\varepsilon\varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R}$

[$\mathrm{R}_0\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R}_0 = \Lambda : \mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{R}_0 \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} : \mathrm{R}'_0\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P}' \,.\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}'_0 = \Lambda :$
$\mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{R}'_0 \,.\supset_{\mathrm{R}'}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' :$ Prop 5·44 $:\supset.\, \mathrm{R}_0\varepsilon\lambda\mathrm{R}'_0 \,.\supset.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R}_0$ (1)
Prop 1·38 . (1) $.\supset.\, \varsigma\mathrm{P} \cap \mathrm{R}_0\ni\{\varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R}_0 = \Lambda :$
$\mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{R}_0 \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R}\} = \Lambda$ (2)
Prop 1·38 . (2) $.\supset.\, \varsigma\mathrm{P}\cap\mathrm{R}\ni\{\varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} = \Lambda\} = \Lambda \,.\supset.$ Prop]

·47 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega \,.\supset.\, \mathrm{P}\varepsilon\lambda\mathrm{P}' \,.\cup.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{P} \,.\cup.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{P}'$

[Prop 5·44·45·46 $.\supset::\, \mathrm{R}\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P} \,.\supset_{\mathrm{R}}.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} : \mathrm{R}'\varepsilon\, \varsigma\mathrm{P}' \,.\supset_{\mathrm{R}'}.$
$\exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' :\supset.\, \mathrm{P}\varepsilon\, \lambda\mathrm{P}' \,.\cdot.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \mathrm{R}'\ni(\varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{R}' = \Lambda) \,.\supset.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{P} :$
$\exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \mathrm{R}\ni(\varsigma\mathrm{P}' \cap \lambda\mathrm{R} = \Lambda) \,.\supset.\, \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{P}' ::\supset.$ Prop]

5·48 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\supset.\!\cdot.\; P \varepsilon \lambda P' \;.\supset.\; \varsigma P' \cap \lambda P = \Lambda \;.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda :$
$\exists\, \varsigma P' \cap \lambda P \;.\supset.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda$

[Prop 5·32 $.\supset: P \varepsilon \lambda P' \;.\supset.\; \varsigma P' \cap \lambda P = \Lambda \;.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda$ (1)
Prop 5·3 . $\exists\, \varsigma P' \cap \lambda P \;.\supset: R \varepsilon\, \varsigma P \;.\supset_R.\; \exists\, \varsigma P' \cap \lambda R \;:\supset.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda$ (2)
(1) . (2) $.\supset.$ Prop]

·49 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\; P \supset P' \;.\supset.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda$

[$P \supset P' \;.\; R \varepsilon\, \varsigma P \;.\supset.\; \exists\, \varsigma P' \cap R' \ni (R \supset R')$ (1)
(1) . Prop 5·34 $.\supset.\; R < P' \;.\supset.$ Prop]

Les propositions précédentes, qui ont été découvertes par Cantor, prouvent que de deux séries bien ordonnées qui ne sont pas semblables il y a toujours une qui est plus grande que l'autre, et que chacun de ces cas exclue l'autre et exclue aussi la similarité.

On peut maintenant prouver que les nombres ordinaux qui précèdent un nombre donné forment une série bien ordonnée, et que tout nombre ordinal moindre qu'un nombre donné s'applique à un segment, et à un seul, d'une série quelconque qui a le nombre donné.

·5 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\supset: (P) L (P') \;.\cup.\; P < P' \;.\cup.\; P > P'$

[Prop 5·32·47 $.\supset.$ Prop]

·51 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\; \exists\, \lambda P \cap \mathrm{Rel}' P' \;.\; \exists\, \lambda P' \cap \mathrm{Rel}' P \;.\supset.\; P \varepsilon \lambda P$

[$R \varepsilon \lambda P' \cap \mathrm{Rel}' P \;.\; R' \varepsilon \lambda P \cap \mathrm{Rel}' P'$. Prop 5·49 $.\supset.\; \varsigma R \cap \lambda P = \Lambda \;.$
$\varsigma R' \cap \lambda P' = \Lambda$ (1)
(1) . Prop 5·3 $.\supset.\; \varsigma P' \cap \lambda P = \Lambda \;.\; \varsigma P \cap \lambda P' = \Lambda$ (2)
(2) . Prop 5·47 $.\supset.$ Prop]

·52 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\; P < P' \;.\supset.\; -(P' < P)$ [Prop 5·1·51 $.\supset.$ Prop]

·53 $P, P' \varepsilon \Omega \;.\supset: P < P' \;.=.\; \exists\, \varsigma P' \cap \lambda P$

[$P' \varepsilon \lambda P \;.\supset.\; -(P < P')$ (1) $\exists\, \varsigma P \cap \lambda P' \;.\supset.\; P' < P$ (2)
(2) . Prop 5·52 $.\supset.\; -(P < P')$ (3)
(1) . (3) . Prop 5·47 $.\supset: P < P' \;.\supset.\; \exists\, \varsigma P' \cap \lambda P$ (4)
(4) . Prop 5·32 $.\supset.$ Prop]

·54 $P, Q, R \varepsilon \Omega \;.\; P < Q \;.\; Q < R \;.\supset.\; P < R$

[Prop 5·32·53 $.\supset$ Prop]

·55 $M^2 \supset M$ [Prop 5·15·54 $.\supset.$ Prop]

* 6·1 $P \varepsilon \Omega \;.\; s \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\; \breve{\imath}\pi\text{-}\pi \varepsilon s : u \supset p \cap s \;.\; \exists\, u\breve{\pi} \;.\supset_u.$
$\mathrm{seq}\, u \varepsilon s \;:\supset.\; p \supset s$

[$\exists\, p - s$. Prop 1·38 $.\supset.\; \exists\, p - s \cap x \ni (\pi x \supset s)$ (1)
Hp . $x \varepsilon p \;.\; \pi x \supset s \;.\supset.\; x \varepsilon s$ (2) (1) . (2) $.\supset.\; p - s = \Lambda \;.\supset.$ Prop]

Cette proposition donne une forme généralisée de l'induction complète. Dans une série bien ordonnée, si *s* est une classe à laquelle appartient le premier terme de la série, et le successeur d'une partie quelconque de la série coutenue dans *s*, alors la série entière est contenue dans *s*.

6·2 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \;.\!\supset\!:\; u\mathrm{N}_p x \;.\!=\!.\; u\varepsilon\varsigma p \;.\; x\varepsilon\mathrm{No} \;.\; \mathrm{P}_{uu}\varepsilon x$ Df

·21 $\mathrm{N}_p\varepsilon 1 \dotplus 1$ [Prop 5·33 $.\!\supset\!.$ Prop]

·22 $\mathrm{M}_p = \breve{\mathrm{N}}_p \mathrm{T}_p \mathrm{N}_p$ Df

Pour la Df de T_p, voir Prop 5·27. M_p est la relation *moins que* parmi les membres ordinaux des segments de p, et m_p est la classe de ces nombres.

·23 $\lambda\mathrm{M}_p = \lambda\mathrm{T}_p = \lambda\mathrm{P}_{\breve{\pi}\breve{\pi}}$ [Prop 5·29 . 6·21·22 $.\!\supset\!.$ Prop]

·24 $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\Omega \;.\; \mathrm{P}' < \mathrm{P} \;.\!\supset\!.\; \exists\, \varsigma\mathrm{P} \cap \lambda\mathrm{P}'$ [Prop 5·32·47 $.\!\supset\!.$ Prop]

·25 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \;.\; \beta\varepsilon\mathrm{No} \;.\; \beta\mathrm{M}\lambda\mathrm{P} \;.\!\supset\!.\; \beta\varepsilon m_p$ [Prop 5·15 . 6·22·24 $.\!\supset\!.$ Prop]

Cette proposition affirme que tout nombre ordinal moindre qu'un nombre donné s'applique à un segment quelconque d'une série qui a le nombre donné.

·26 $\alpha\varepsilon\mathrm{No} \;.\; \mathrm{P}\varepsilon\alpha \;.\!\supset\!.\; \mu\alpha = m_p$ [Prop 5·13 . 6·25 $.\!\supset\!.$ Prop]

·27 $\alpha,\beta\varepsilon\mathrm{No} \;.\!\supset\!:\; \alpha=\beta \;.\!\cup\!.\; \alpha\mathrm{M}\beta \;.\!\cup\!.\; \beta\mathrm{M}\alpha$ [Prop 5·15·5 $.\!\supset\!.$ Prop]

·28 $\alpha\varepsilon\mathrm{No} \;.\!\supset\!.\; \mathrm{M}_{\mu\alpha\mu\alpha}\varepsilon\Omega$

[Prop 2·31 . 6·23 $.\!\supset\!:$ $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \;.\!\supset_{\mathrm{P}}\!.\; \mathrm{M}_p\,\varepsilon\Omega$ (1)
(1) . Prop 6·26 $.\!\supset\!.$ Prop]

Dans cette proposition on prouve que les nombres ordinaux moindres qu'un nombre quelconque α forment une série bien ordonnée par rapport à M. Nous ne savons démontrer que la classe de tous les nombres ordinaux forme une série bien ordonnée par rapport à M.

·3 $\alpha\varepsilon\mathrm{No} \;.\!\supset\!.\; \alpha^0 = 1 \;.\; \alpha^1 = \alpha$ Df

·31 $\alpha,\beta\varepsilon\mathrm{No} \;.\; \exists\,\mu_1\beta \;.\!\supset\!.\, \alpha^\beta = \alpha^{\iota\mu_1\beta}\times\alpha$ Df

·32 $\alpha,\beta\varepsilon\mathrm{No} \;.\; \mu_1\beta = \Lambda \;.\!\supset\!.\; \alpha^\beta = \mathrm{seq}\,x\ni\{\exists\,\mu\beta \cap \gamma\ni(x = \alpha^\gamma)\}$ Df

Les trois propositions précédentes définissent les puissances par induction, dans le sens généralisé qui résulte de la Prop 6·1.

·33 $\alpha,\beta\varepsilon\,\mathrm{No} \;.\; \mu_1\beta = \Lambda \;.\; u = x\ni\{\exists\,\mu\beta \cap \gamma\ni(x = \alpha^\gamma)\} \;.\; v \supset u \;.\; u \cap \breve{v\mu}$
$= \Lambda \;.\!\supset\!.\; \alpha^\beta = \mathrm{seq}\,v$

[Hp . $u \cup \mu u = v \cup \mu v \;.\!\supset\!.\; \mathrm{seq}\,u = \mathrm{seq}\,v \;.\!\supset\!.$ Prop]

6·34 $u \supset \mathrm{No} \,.\!\supset\!.\, \Sigma u = \imath \mathrm{No} \frown a \ni \{ \mathrm{S} \varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, \sigma = u \,.\, \mathrm{P} = \breve{\mathrm{S}} \mathrm{M}_{uu} \mathrm{S} \,.$
$p \varepsilon \mathrm{Cls}'\Omega\mathrm{Excl} : \beta \varepsilon u \,.\!\supset_\beta\! .\, \imath\sigma u \;\varepsilon \beta : \supset \Sigma_{\mathrm{P}} p \;\varepsilon a \}$ Df

Pour la Df de $\Sigma_{\mathrm{P}} p$, voir Prop3·27. Σu est la somme des nombres qui composent u en ordre de grandeur croissante. Σu est unique à cause de la Prop3·28.

·37 $\mathrm{S}\varepsilon 1 \dashv 1 \,.\, \sigma \supset \mathrm{No} \,.\, \breve{\sigma} \supset \mathrm{No} \,.\, \breve{\mathrm{S}}\mathrm{M}\mathrm{S} \supset \mathrm{M} \,.\!\supset\!.\, \underset{x\varepsilon\sigma}{\Sigma} \imath\breve{\sigma} x = \Sigma \breve{\sigma}$ Df

On donne ici la Df de la somme des valeurs d'une fonction croissante d'un nombre ordinal variable pour une classe donnée de valeurs de la variable.

·4 $a,\beta,\gamma \varepsilon \mathrm{No} \,.\!\supset\!.\, (a+\beta)+\gamma = a+(\beta+\gamma)$

[$\mathrm{P}\varepsilon a \,.\, \mathrm{Q}\varepsilon\beta \,.\, \mathrm{R}\varepsilon\gamma \,.\, pq = \Lambda \,.\, pr = \Lambda \,.\, qr = \Lambda \,.\, \mathrm{P}+\mathrm{Q} = \mathrm{P}' \,.\, \mathrm{Q}+\mathrm{R} = \mathrm{Q}' \,.\!\supset\!.$
$\mathrm{P}'+\mathrm{R} \;\varepsilon\; (a+\beta)+\gamma \,.\, \mathrm{P}+\mathrm{Q}' \;\varepsilon\; a+(\beta+\gamma)$ (1)
$\mathrm{P}' = \mathrm{P} \cup \mathrm{Q} \cup \varepsilon \mathrm{R}_{pq} \breve{\varepsilon} \,.\!\supset\!.\, \mathrm{P}'+\mathrm{R} = \mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{pq}\breve{\varepsilon} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{p'r}\breve{\varepsilon}$
$= \mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{pq}\breve{\varepsilon} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{pr}\breve{\varepsilon} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{qr}\breve{\varepsilon}$ (2)
$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}\cup\mathrm{R}\cup \varepsilon\mathrm{R}_{qr}\breve{\varepsilon} \,.\!\supset\!.\, \mathrm{P}+\mathrm{Q}' = \mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\cup\mathrm{R} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{pq}\breve{\varepsilon} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{pr}\breve{\varepsilon} \cup \varepsilon\mathrm{R}_{qr}\breve{\varepsilon}$ (3)
(1) . (2) . (3) . Prop2·34 $.\!\supset\!.$ Prop]

·41 $a,\beta,\gamma \varepsilon \mathrm{No} \,.\!\supset\!.\, a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma$

$\mathrm{Q}\varepsilon\beta \,.\, q\varepsilon \mathrm{Cls}'a\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{Q}'\varepsilon\gamma \,.\, q'\varepsilon\, \mathrm{Cls}'a\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{Q}+\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}'' \,.\, \mathrm{P} = \Sigma_{\mathrm{Q}} q \,.\, \mathrm{P}' =$
$\Sigma_{\mathrm{Q}'} q' \,.\, pp' = \Lambda \,.\, \mathrm{P}+\mathrm{P}' = \mathrm{P}'' \,.\!\supset\!: \mathrm{Q}''\varepsilon\beta+\gamma \,.\, \mathrm{P}\varepsilon\, a\times\beta \,.\, \mathrm{P}'\varepsilon\, a\times\gamma \,.$
$\mathrm{P}''\varepsilon\, a\beta+a\gamma \,.\, \Sigma_{\mathrm{Q}''} q'' \varepsilon\, a(\beta+\gamma)$ (1)
$\mathrm{P}'' = \mathrm{P}\cup\mathrm{P}' \cup \mathrm{E}\mathrm{R}_{\mathrm{PP}'}\breve{\mathrm{E}} = (\cup' q) \cup (\cup' q') \cup \mathrm{E}\mathrm{Q}\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E}\mathrm{Q}'\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E}\mathrm{R}_{\mathrm{PP}'}\breve{\mathrm{E}}$ (2)
$\Sigma_{\mathrm{Q}''} q'' = \cup' q' \cup \mathrm{E}\mathrm{Q}''\breve{\mathrm{E}} = (\cup' q) \cup (\cup' q') \cup \mathrm{E}\mathrm{Q}\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E}\mathrm{Q}'\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E}\mathrm{R}_{\mathrm{PP}'}\breve{\mathrm{E}}$ (3)
(1) . (2) . (3) . Prop2·34 $.\!\supset\!.$ Prop]

$a,\beta,\gamma\varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\, \mathrm{R}\varepsilon\gamma \,.\, r\varepsilon \mathrm{Cls}'\,\beta\mathrm{Excl} \,.\, \mathrm{Q} = \Sigma_{\mathrm{R}}\, r : \mathrm{Q}'\varepsilon r \,.\!\supset_{\mathrm{Q}'}\!.$
$q'\varepsilon\, \mathrm{Cls}'a\mathrm{Excl} : \supset\!\therefore$

·42 $r_\Sigma = x \ni \{ \exists r \frown \mathrm{Q}' \ni (x = \Sigma_{\mathrm{Q}'} q') \}$ Df

·43 $x \mathrm{R}_\Sigma\, y \,.\!=\!:\, x,y \varepsilon\, r_\Sigma : \mathrm{Q}',\mathrm{Q}''\varepsilon r \,.\, x = \Sigma_{\mathrm{Q}'} q' \,.\, y = \Sigma_{\mathrm{Q}''} q'' \,.\!\supset\!.$
$(\mathrm{Q}')\mathrm{R}(\mathrm{Q}'')$ Df

·44 $\mathrm{R}_\Sigma\, \varepsilon\gamma$ [$\exists 1 \dashv 1 \frown \mathrm{S} \ni \{ (\mathrm{Q})\mathrm{S}x \,.\!=\!.\, \mathrm{Q}\varepsilon r \,.\, x = \Sigma_{\mathrm{Q}} q \} \,.\!\supset\!.$ Prop]

·45 $q \supset a$ [$\mathrm{Q} = \Sigma_{\mathrm{R}}\, r \,.\, \cup' r = \mathrm{R}_s \,.\!\supset\!.\, q = r_s = x \ni \{ \exists r \frown \mathrm{Q}' \ni (x\varepsilon q') \} \,.\!\supset\!.$ Prop]

6·46 $r_\Sigma \varepsilon \mathrm{Cls'RelExcl} \;.\supset.\; q \varepsilon \mathrm{Cls'}a\mathrm{Excl}$

[$\cup' r = \mathrm{R}_s \;.\supset:\; \mathrm{P}\varepsilon q \;.=.\; \mathrm{P}\varepsilon r_s \;.=.\; \exists r \cap \mathrm{Q'} \ni (\mathrm{P}\varepsilon q')$ (1)

$\mathrm{P},\mathrm{P'}\varepsilon q \;.\exists r \cap \mathrm{Q'}\ni(\mathrm{P},\mathrm{P'}\varepsilon q') : \mathrm{Q'}\varepsilon r \;.\supset_{\mathrm{Q'}}.\; q'\varepsilon\, \mathrm{Cls'}a\mathrm{Excl} \;:\supset.\; pp' = \Lambda$ (2)

$\mathrm{Q'},\mathrm{Q''}\varepsilon r \;.\; (\mathrm{Q'})0'(\mathrm{Q''}) \;.\; \mathrm{R'} = \Sigma_{\mathrm{Q'}} q' \;.\; \mathrm{R''} = \Sigma_{\mathrm{Q''}} q'' \;.\; \mathrm{Q'}_s = \cup' q' \;.\; \mathrm{Q''}_s =$
$\cup' q'' \;.\supset.\; r' = q'_s \;.\; r'' = q''_s$ (3)

$(3) \;.\; r_\Sigma \varepsilon\, \mathrm{Cls'RelExcl} \;.\supset.\; q'_s \cap q''_s = \Lambda$ (4)

$\mathrm{Hp}(3) \;.\; \mathrm{P'}\varepsilon q' \;.\; \mathrm{P''}\varepsilon q'' \;.\supset.\; p' \supset q'_s \;.\; p'' \supset q_s''$ (5)

$(4) \;.\; (5) \;.\supset.\; p'p'' = \Lambda$ (6)

$(1) \;.\; (2) \;.\; (6) \;.\;$ Prop 6·45 $\;.\supset.\;$ Prop]

·47 $a,\beta,\gamma \varepsilon \mathrm{No} \;.\supset.\; a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma$

[Hp 6·42 . Hp 6·46 $\;.\supset.\; \Sigma_{\mathrm{Q}}\, q = (a\beta)\gamma \;.\; \Sigma_{\mathrm{R}_\Sigma}\, r_\Sigma = a(\beta\gamma)$ (1)

$x(\Sigma_{\mathrm{Q}}\, q)y \;.=:\; \exists q \cap \mathrm{P}\ni(x,y\varepsilon p \;.\; x\mathrm{P}y) \;.\cup.\; x\mathrm{EQ\breve{E}}y$ (2)

$(2) : \mathrm{R}_s = \cup' r \;.\supset.\; q = r_s : .\supset.\because\; x(\Sigma_{\mathrm{Q}}\, q)y \;.=:\; \exists r \cap \mathrm{Q'}\ni$
$;\exists q' \cap \mathrm{P}\ni(x\mathrm{P}y); \;.\cup.\; x\mathrm{E}(\cup' r \cup \mathrm{ER\breve{E}})\mathrm{\breve{E}}y \;:=:\; \exists r \cap \mathrm{Q'}\ni$
$;\exists q' \cap \mathrm{P}\ni(x\mathrm{P}y); \;.\cup.\; \exists r \cap \mathrm{Q'}\ni(x\mathrm{EQ'\breve{E}}y) \;.\cup.\; x\mathrm{E^2R\breve{E}^2}y$ (3)

$\mathrm{Q'}\varepsilon r \;.\supset.\because\; x(\Sigma_{\mathrm{Q'}}\, q')y \;.=:\; \exists q' \cap \mathrm{P}\ni(x\mathrm{P}y) \;.\cup.\; x\mathrm{EQ\breve{E}}y$ (4)

$(4) \;.\supset.\because\; x(\Sigma_{\mathrm{R}_\Sigma}\, r_\Sigma)y \;.=:\; \exists r \cap \mathrm{Q'}\ni;\exists q' \cap \mathrm{P}\ni(x\mathrm{P}y);$
$.\cup.\; \exists r \cap \mathrm{Q'}\ni(x\mathrm{EQ'\breve{E}}y) \;.\cup.\; x\mathrm{E^2R\breve{E}^2}y$ (5)

$(3) \;.\; (5) \;.\supset.\; \Sigma_{\mathrm{Q}}\, q = \Sigma_{\mathrm{R}_\Sigma}\, r_\Sigma$ (6)

$(1) \;.\; (6) \;.\;$ Prop2·34 $\;.\supset.\;$ Prop]

Les Df précédentes des sommes des classes de relations peuvent s'etendre au cas où les relations n'appartiennent pas nécessairement à la classe Ω. Cette extension s'effectue dans les propositions suivantes, où l'on doit aussi appliquer à une relation quelconque les Df 1·11, 3·27.

·5 $\mathrm{R}\varepsilon\mathrm{Rel} \;.\; r \supset \mathrm{Rel} \;.\supset.\; \mathrm{R}_s = \cup' r$ Df

·51 $\mathrm{R}\varepsilon\mathrm{Rel} \;.\; r \supset \mathrm{Rel} \;.\; r_s \supset \mathrm{Rel} \;.\supset.\; \mathrm{R}_{ss} = \cup' r_s$ Df

·52 $\mathrm{Rel}^2 = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}\ni(r \supset \mathrm{Rel})$ Df

·53 $\mathrm{Rel}^3 = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}\ni(r \supset \mathrm{Rel}^2)$ Df

·54 $\mathrm{Rel^2Excl} = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{R}\ni(\mathrm{R} \supset 0' \;.\; r \varepsilon\, \mathrm{Cls'RelExcl})$ Df

·55 $\mathrm{Rel^3Excl} = \mathrm{Rel}^3 \cap \mathrm{Rel^2Excl}$ Df

6·56 $\mathrm{Rel^3Arithm} =$
$\mathrm{Rel^3Excl} \cap \mathrm{R} \ni (r \supset \mathrm{Rel^2Excl} \,.\, \mathrm{R}\Sigma\, \varepsilon \mathrm{Rel^2Excl})$ Df

·57 $\mathrm{R}\varepsilon\mathrm{Rel^3Arithm} \,.\, \mathrm{Q} = \Sigma_\mathrm{R}\, r \;.\supset.\; \Sigma_\mathrm{Q}\, q = \mathrm{R}_{ss} \cup \mathrm{ER}_s\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E^2R}\breve{\mathrm{E}}^2$

·58 $\mathrm{R}\varepsilon\mathrm{Rel^3Arithm} \,.\, \alpha,\beta,\gamma\varepsilon\mathrm{N_0} \,.\, \mathrm{R}\varepsilon\gamma \,.\, r \supset \beta \,.\, r_s \supset \alpha \;.\supset.$

$\mathrm{R}_{ss} \cup \mathrm{ER}_s\breve{\mathrm{E}} \cup \mathrm{E^2R}\breve{\mathrm{E}}^2 \;\varepsilon\; \alpha\beta\gamma$

[Prop6·47 Dem . Prop6·57 $.\supset.$ Prop]

Il est évident qu'on peut étendre la formule 6·58 au produit d'un nombre fini quelconque de nombres ordinaux. En prouvant les lois formales de l'addition et de la multiplication, je me suis guidé par l'analogie très frappante entre les idées dont on a besoin ici et celles que M. Whitehead a introduites en prouvant les théorèmes analogues pour les nombres cardinaux. L'idée de Rel³Arithm remplace ici celle de Cls³Arithm, dont on a besoin pour démontrer la loi associative de la multiplication des nombres cardinaux. Cette analogie a beaucoup facilité la decouverte des preuves que nous venons de donner; et c'est pour la faire ressortir plus nettement que nous avons donné les Df 6·5-·56. Cependant je ne sais pas étendre la méthode de la Prop6·47 à un produit d'un nombre infini de nombres ordinaux.

·6 $\mathrm{S}\varepsilon\, 1{\to}1 \,.\, \sigma = \mathrm{No} \,.\, \breve{\sigma} \supset \mathrm{No} \,.\, \gamma\varepsilon\mathrm{No} \,.\, \delta\varepsilon\, \mathrm{No}{-}\iota 0 \,.\, \iota\breve{\sigma}0 = \delta :$

$\alpha\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset_\alpha.\; \iota\breve{\sigma}(\alpha+1) = \iota\breve{\sigma}\alpha\times\gamma : u \supset \mathrm{No} \;.\supset_u.$

$\iota\breve{\sigma}\,\mathrm{seq}\,u = \mathrm{seq}\,\breve{\sigma}u \;:\supset:\; \xi\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset_\xi.\; \iota\breve{\sigma}\xi = \delta\gamma^\xi$

[Prop 6·1·3·31·32 $.\supset.$ Prop]

Ce théorème est le théorème A du §18 de l'article de M. Cantor dans les Mathematische Annalen, t.49.

·61 $\alpha,\beta,\gamma\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset.\; \gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha\, \gamma^\beta$

[Prop 6·47 6·6 $.\supset:\; \gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha\gamma^\beta \;.\supset.\; \gamma^{\alpha+\beta+1} = \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma = \gamma^\alpha\gamma^{\beta+1}$ (1)

$u \supset \mathrm{No} : \xi\varepsilon u \;.\supset_\xi.\; \gamma^{\alpha+\xi} = \gamma^\alpha\gamma^\xi : v = x \ni \{\exists u \cap \xi \ni (x 1' \gamma^{\alpha+\xi})\} :$ Prop 6·6 $:\supset.$

$\mathrm{seq}\,v = \gamma^{\alpha+\mathrm{seq}\,u}$ (2)

$\gamma^1\gamma^1 = \gamma^2$ (3) (1) . (2) . (3) . Prop 6·1 $.\supset.$ Prop]

·62 $\alpha,\beta,\gamma\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset.\; \gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$

[$\gamma^{\alpha\times1} = (\gamma^\alpha)^1$ (1)

Prop 6·61 . $\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta \;.\supset.\; \gamma^{\alpha\,\mathrm{seq}\,\beta} = \gamma^{\alpha\beta}\gamma^\alpha = (\gamma^\alpha)^{\mathrm{seq}\,\beta}$ (2)

$u \supset \mathrm{N_0} : \xi\varepsilon u \;.\supset_\xi.\; (\gamma^\alpha)^\xi = \gamma^{\alpha\xi} : v = x \ni \{\exists u \cap \xi \ni (x 1' \gamma^{\alpha\xi})\} \;:\supset.$

$\mathrm{seq}\,v = (\gamma^\alpha)^{\mathrm{seq}\,u}$ (3) (1) . (2) . (3) . Prop 6·1 $.\supset.$ Prop]

* 7·1 $u\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\supset.\ \mathrm{Nc}'u = \mathrm{Cls}\cap v\ni(u\mathrm{Sim}v)$ Df

·11 $\mathrm{Nc} = \mathrm{Cls}'\mathrm{Cls}\cap w\ni\{\exists\mathrm{Cls}\cap u\ni(v\varepsilon w\ .=.\ u\mathrm{Sim}v)\}$ Df

De même que les nombres ordinaux, on peut regarder les nombres cardinaux comme des classes; par ce moyen on évite une idée primitive qui ne sert à rien du point de vue mathématique.

·12 $u,v\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\ u\mathrm{Sim}v\ .\supset.\ {}''\mathrm{P}_v = 1\text{-}1\cap\mathrm{R}\ni(\varrho=u\ .\ \breve{\varrho}=v)$ Df

·13 $u,v\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\ \exists\mathrm{Nc}'u\cap\mathrm{Cls}'v\ .\supset.\ \mathrm{P}''_v =$

$1\text{-}1\cap\mathrm{R}\ni(\varrho=u\ .\ \breve{\varrho}\supset v)$ Df

·14 $u\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\supset.\ \Omega_u=\Omega\cap\mathrm{P}\ni(p=u)$ Df

·15 $u,v\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\supset\ {}''\mathrm{P}_v\supset\mathrm{P}''_v$

·16 $u\varepsilon\mathrm{Cls\ fin}\ .\supset.\ {}''\mathrm{P}_u = \mathrm{P}''_u\ .\ \mathrm{Nc}'{}''\mathrm{P}_u = (\mathrm{Nc}'u)!$

·17 $u\varepsilon\mathrm{Cls\ infin}\ .\supset.\ \mathrm{Nc}'{}''\mathrm{P}_u \leq \mathrm{Nc}'\mathrm{P}''_u$ [Prop 7·15 .⊃. Prop]

$''\mathrm{P}_u$ est le groupe des permutations de la classe u.

·18 $\mathrm{R}\varepsilon\,\mathrm{Rel}\ .\supset:\ x\mathrm{R}^{\mathrm{N}}y\ .=.\ \exists\mathrm{No\ fin}\cap n\ni(x\mathrm{R}^n y)$ Df

$u\varepsilon\mathrm{Cls}\ .\supset::$

·2 $\mathrm{P}\varepsilon\,\Omega_u\ .\ \mathrm{R}\varepsilon{}''\mathrm{P}_u\ .\supset.\ \breve{\mathrm{R}}\mathrm{PR}\varepsilon\,\Omega_u\cap\lambda\mathrm{P}$

·21 $\mathrm{P,P}'\varepsilon\,\Omega_u\ .\ \mathrm{P}'\varepsilon\lambda\mathrm{P}\ .\supset.\ \exists{}''\mathrm{P}_u\cap\mathrm{R}\ni(\mathrm{P}'=\breve{\mathrm{R}}\mathrm{PR})$

·22 $\mathrm{P,P}'\varepsilon\,\Omega_u\ .\supset:\ \mathrm{P}'\varepsilon\lambda\mathrm{P}\ .=.\ \exists{}''\mathrm{P}_u\cap\mathrm{R}\ni(\mathrm{P}'=\breve{\mathrm{R}}\mathrm{PR})$
[Prop 7·2·21 .⊃. Prop]

·23 $\mathrm{P}\varepsilon\,\Omega_u\ .\ \mathrm{R,R}'\varepsilon{}''\mathrm{P}_u\ .\ \mathrm{R}-=\mathrm{R}'\ .\supset.\ \breve{\mathrm{R}}\mathrm{PR}-=\breve{\mathrm{R}}'\mathrm{PR}'$
[Prop 5·35 Transp .⊃. Prop]

·24 $\mathrm{P}\varepsilon\,\Omega_u\ .\supset.\ \mathrm{Nc}'\lambda\mathrm{P}\cap\Omega_u = \mathrm{Nc}'{}''\mathrm{P}_u$ [Prop 7·22·23 .⊃. Prop]

·25 $\mathrm{No}_u = \mathrm{No}\cap x\ni(\exists x\cap\Omega_u)$ Df

·26 $\mathrm{Nc}'\Omega_u = \mathrm{Nc}'{}''\mathrm{P}_u\times\mathrm{Nc}'\mathrm{No}_u$ [Prop 7·24·25 .⊃. Prop]

Chaque type de série qu'on peut former de la classe u peut se former de Nc' $''\mathrm{P}_u$ manières, puisque l'on peut permuter les termes autant que l'on voudra sans changer le type de la série. Donc le nombre total de séries qu'on peut former d'une classe u s'obtient en multipliant le nombre de permutations de la classe par le nombre de types de séries possibles.

·27 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls\ fin}\ .\ \mathrm{R,R}'\varepsilon{}''\mathrm{P}_u\ .\supset.\ \mathrm{R}\varepsilon\lambda\mathrm{R}'$ [Induct]

·28 $u\varepsilon\,\mathrm{Cls\ fin}\ .\ \mathrm{P}\varepsilon\Omega_u\ .\ x=\iota\pi\text{-}\breve{\pi}\ .\ y=\iota\breve{\pi}\text{-}\pi\ .\supset.\ \mathrm{P}_1\cup\mathrm{R}_{yx}\,\varepsilon{}''\mathrm{P}_u$
[Prop 1·32 .⊃. Prop]

$7{\cdot}29 \quad u \varepsilon \mathrm{Cls\ fin} \,.\supset.\, \mathrm{Nc}'\mathrm{No}_u = 1 \qquad [\ \mathrm{Prop}\ 7{\cdot}26{\cdot}27{\cdot}28 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

$\cdot 3 \quad \mathrm{P} \varepsilon \Omega_u \,.\, \breve{\pi} \supset \pi \,.\supset.\, \mathrm{P}_1 \varepsilon \mathrm{P}^u_u \qquad [\ \mathrm{Prop}\ 1{\cdot}24{\cdot}25{\cdot}26\ 7{\cdot}13 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

$\cdot 31 \quad \mathrm{P,P}' \varepsilon\, \Omega_u \,.\, \mathrm{P}_1 0' \mathrm{P}'_1 \,.\supset.\, \mathrm{P} 0' \mathrm{P}'$

$[\ \mathrm{P}_1 0' \mathrm{P}'_1 \,,\, \exists \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}'_1 \,.\supset.\, \exists u \cap (x,y) \ni \{ x\mathrm{P}y \,.\, x - \mathrm{P}^2 y : x - \mathrm{P}' y \,.\cup.\, x \mathrm{P}'^2 y \}$
$\qquad .\supset.\, \exists u \cap (x,y) \ni \{ x \mathrm{P} - \mathrm{P}' y \,.\cup.\, x \mathrm{P}'^2 - \mathrm{P}^2 y \} \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

$\mathrm{P}0'\mathrm{P}'$ n'entraine pas $\mathrm{P}_1 0' \mathrm{P}_1'$.

$\cdot 32 \quad a_0 = \mathrm{Cls} \cap u \ni \{ \exists \omega \cap \mathrm{P} \ni (u = p) \} \qquad \mathrm{Df}$

a_0 est le plus petit des nombres cardinaux transfinis. J'ai remplacé l'Aleph de Cantor par a, puisque cette lettre est plus commode.

$\cdot 33 \quad \mathrm{R} \varepsilon\, 1 \rightarrow 1 \,.\, x \varepsilon \varrho \,.\, \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \supset 0' \,.\, \breve{\varrho}^{\mathrm{N}} x \supset \varrho \,.\supset.\, \breve{\varrho}^{\mathrm{N}} x \varepsilon\, a_0$

D'apres la Df 7·18, $\breve{\varrho}^{\mathrm{N}} x = y \ni \{ \exists \mathrm{No\ fin} \cap n \ni (x \mathrm{R}^n y) \}$.

$[\ \mathrm{Hp} \,.\supset.\, \exists\, 1 \rightarrow 1 \cap \mathrm{S} \ni (\sigma = \mathrm{No\ fin} \,.\, \breve{\sigma} = \breve{\sigma}^{\mathrm{N}} x) \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

On présuppose ici la théorie des progressions développée dans l'article précédent, §§ 3,4.

$\cdot 34 \quad \mathrm{R} \varepsilon \mathrm{Rel} \,.\, v = \mathrm{Cls} \cap w \ni \{ \exists \varrho \cup \breve{\varrho} \cap x \ni (w = \varrho^{\mathrm{N}} x \cup \iota x \cup \breve{\varrho}^{\mathrm{N}} x) \} \,.\supset.$
$\qquad v \varepsilon \mathrm{Cls}^2 \mathrm{Excl} \qquad [\ w,w' \varepsilon v \,.\, x \varepsilon w \cap w' \,.\supset.\, w = w' \,:\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

$\cdot 35 \quad \exists \Omega_u \,.\, \mathrm{R} \varepsilon\, \mathrm{P}^u_u \,.\, \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \supset 0' : x \varepsilon \breve{\varrho} \,.\supset_x.$
$\qquad \exists \varrho^{\mathrm{N}} x - \breve{\varrho} \,:\supset.\, \exists \Omega_u \cap \mathrm{P} \ni (\mathrm{R} = \mathrm{P}_1)$

$[\ \mathrm{R} \varepsilon \mathrm{P}^u_u \,.\supset.\, \breve{\varrho} \supset \varrho \quad (1) \qquad (1) \,.\, \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \supset 0' \,.\, \exists \varrho - \breve{\varrho} \,.\supset.\, u \varepsilon \mathrm{Cls\ infin} \quad (2)$

$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, \mathrm{Prop}\ 7{\cdot}33 \,.\, v = \mathrm{Cls} \cap w \ni \{ \exists u \cap x \ni (w = \varrho^{\mathrm{N}} x \cup \iota x \cup \breve{\varrho}^{\mathrm{N}} x) \} \,.\supset.\because$
$v \supset a_0 : w \varepsilon v \,.\supset_w.\, \mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{ww} \varepsilon \omega \,.\because\supset.\, \mathrm{Nc}' v \times a_0 = \mathrm{Nc}' u \quad (3)$

$(3) \,.\, \mathrm{Nc}' u = a_0 \,.\supset.\, \mathrm{Nc}' v \varepsilon \mathrm{Nc\ fin} \cup \iota a_0 \,.\supset.\, \exists \Omega_v \quad (4)$
$(3) \,.\, \mathrm{Nc}' u > a_0 \,.\supset.\, \mathrm{Nc}' u = \mathrm{Nc}' v \,.\supset.\, \exists\, {}^u\mathrm{P}_v \quad (5)$
$\mathrm{Hp}\ (5) \,.\, (5) \,.\, \exists \Omega_u \,.\supset.\, \exists \Omega_v \quad (6)$
$(2) \,.\, (4) \,.\, (6) \,.\supset.\, \exists \Omega_v \quad (7)$
$\mathrm{Prop}\ 7{\cdot}34 \,.\, \mathrm{P}' \varepsilon \Omega_v \,.\, \mathrm{K} = \mathrm{Rel} \cap \mathrm{Q} \ni \{ \exists v \cap w \ni (\mathrm{Q} = \mathrm{R}_{ww}) \} \,.\, \mathrm{P} = \Sigma_{p'} \mathrm{K} \,.\supset.$

$\mathrm{P}_1 = \mathrm{R} \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

Dans la démonstration qu'on vient de donner, c'est principalement la possibilité de bien ordonner la classe v qu'il faut prouver. Il n'y a aucune raison, à ce que je sache, de croire que toute classe peut être bien ordonnée. On voit qne P_1 dépend uniquement de la classe K qui paraît dans la dernière ligne de la preuve, et nullement de la relation P' selon la quelle on ordonne la classe v qui est le champ de K. Dans la preuve on présuppose Prop 9·41, d'où se déduit la proposition

$$a \varepsilon \mathrm{Nc\ infin} \,.\, \exists a \cap u \ni (\exists \Omega_u) \,.\supset.\, a = a \times a_0.$$

7·36 $u \varepsilon \mathrm{Cls\ infin} \,.\, \exists \Omega_u \,.\supset.\, \mathrm{Nc}'\Omega_u = \mathrm{Nc}\{\Omega_u \cap \mathrm{P}\ni(\breve{\pi} \supset \pi)\}$

$[\ \mathrm{Nc}'\Omega_u = a_0 \times \mathrm{Nc}\{\Omega_u \cap \mathrm{P}\ni(\breve{\pi} \supset \pi)\} \,.\, \mathrm{Nc}'\{\Omega_u \cap \mathrm{P}\ni(\breve{\pi} \supset \pi)\}\varepsilon\,\mathrm{Nc\ infin} \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·37 $u \varepsilon \mathrm{Cls\ infin} \,.\supset.\, \mathrm{Nc}'\mathrm{No}_u = \mathrm{Nc}'\mathrm{No}_u \cap x\ni\{\mathrm{P}\varepsilon x \,.\supset.\, \breve{\pi} \supset \pi\{$

$= \mathrm{Nc}'\mathrm{No}_u \cap x\ni\{\mathrm{P}\varepsilon x \,.\supset.\, (\delta p)\breve{\pi} = \Lambda\}$ $[\ \mathrm{Prop}\ 7{\cdot}36 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·4 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, x,y\varepsilon p \,.\, x\mathrm{P}y \,.\, y\text{-}\varepsilon\delta p \,.\, \delta p \cap \breve{\pi}x \cap \pi y = \Lambda \,.\supset.\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y$

$[\ x\mathrm{P}y \,.\, x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\supset.\, \exists\,\breve{\pi}x \cap \pi y$ (1)

$x\mathrm{P}y \,.\, x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\, z\varepsilon\breve{\pi}x \cap \pi y \,.\supset:\, x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z \,.\cup.\, z\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y$ (2)

$\mathrm{Hp}\,(2) : z\varepsilon\breve{\pi}x \cap \pi y \,.\supset_z.\, z\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y :\supset.\, y\varepsilon\delta p$ (3)

$\mathrm{Hp}\,(2) \,.\, \exists\breve{\pi}x \cap \pi y \cap z\ni\{x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z \,.\, z\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y\} \,.\, \mathrm{Prop}\ 1{\cdot}38 \,.\supset.$

$\exists\breve{\pi}x \cap \pi y \cap z_0\ni\{x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z_0 \,.\, z_0\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y : z\varepsilon\pi z_0 \,.\supset_z.\, z\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\supset_z.$

$z\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z_0\} \,.\supset_z.\, z_0\varepsilon\delta p$ (4)

$(3) \,.\, (4) \,.\supset.\!\cdot.\, x\mathrm{P}y \,.\, x\text{-}\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\supset:\, y\varepsilon\delta p \,.\cup.\, \exists\delta p \cap \breve{\pi}x \cap \pi y$ (5)

$(5) \,.\, \mathrm{Transp} \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·41 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, x,y\varepsilon p \,.\, x\mathrm{P}y \,.\supset:\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.=.\, y\text{-}\varepsilon\delta p . \delta p \cap \breve{\pi}x \cap \pi y = \Lambda$

$[\ x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\supset.\, \exists z\ni(z\mathrm{P}_1y) \,.\supset.\, y\text{-}\varepsilon\delta p$ (1)

$x\mathrm{P}_1{}^2y \,.\, x\mathrm{P}z \,.\, z\mathrm{P}y \,.\supset.\, x\mathrm{P}_1z \,.\, z\mathrm{P}_1y$ (2)

$n\varepsilon\mathrm{No\ fin} : x\mathrm{P}_1{}^n y \,.\, x\mathrm{P}z \,.\, z\mathrm{P}y \,.\supset.\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z \,.\, z\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y :\supset.\!\cdot.$

$x\mathrm{P}_1{}^{n+1}y' \,.\, x\mathrm{P}z' \,.\, z'\mathrm{P}y' \,.\supset:\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z' \,.\, z'\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\cup.\, z'1'y :\supset.$

$x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z' \,.\, z'\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y,$ (3)

$(2) \,.\, (3) \,.\, \mathrm{Induct} \,.\supset:\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y \,.\, x\mathrm{P}z \,.\, z\mathrm{P}y \,.\supset.\, x\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}z \,.\, z\mathrm{P}_1{}^{\mathrm{N}}y$ (4)

$(1) \,.\, (4) \,.\, \mathrm{Prop}\ 7{\cdot}4 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·42 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, x\mathrm{P}_1{}^{(1)}y \,.\, \iota x \cup \breve{\pi}x \cap \pi y = w \,.\supset.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{ww} = \mathrm{P}_{ww} \,.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{ww}\,\varepsilon\omega$

$[\ \mathrm{Prop}\ 4{\cdot}22 \,.\, 7{\cdot}41 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·43 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \exists\delta p \,.\, v = (\delta p)\pi \,.\supset.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{vv} = \mathrm{P}_{vv} \,.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{vv}\,\varepsilon\omega$

$[\ \mathrm{Prop}\ 4{\cdot}23 . 7{\cdot}41 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·44 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, \breve{\pi} \supset \pi \,.\, \exists(\delta p)\breve{\pi} \,.\, u = (\delta p)\breve{\pi} \,.\supset.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{uu} = \mathrm{P}_{uu} \,.\, \mathrm{P}^{\mathrm{N}}_{uu}\,\varepsilon\omega$

$[\ \mathrm{Prop}\ 1{\cdot}43 . 4{\cdot}24 . 7{\cdot}41 \,.\supset.\, \mathrm{Prop}\ ]$

·45 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\supset.$

$\partial p = \mathrm{Cls} \cap u\ni\{\exists p \cap x\ni(u = \pi_1{}^{\mathrm{N}}x \cup \iota x \cap \breve{\pi}_1{}^{\mathrm{N}}x)\}$ Df

·46 $P\varepsilon\Omega \,.\, u\varepsilon\partial p \,.\, \exists\delta p \cap u\breve{\pi} \;.\!\supset\!.\; P_{uu}\varepsilon\omega$ [Prop 7·41·42 .⊃. Prop]

·47 $\partial p\, \varepsilon\, \mathrm{Cls}^2\mathrm{Excl}$ [Prop 7·34 .⊃. Prop]

·48 $P\varepsilon\Omega \,.\, u\varepsilon\partial p \,.\, x,y\varepsilon u \;.\!\supset\!.\; \breve{\pi}x \cap \pi y \supset u$ [Prop7·41(4) . Prop]

·5 $u\varepsilon\partial p \;.\!\supset\!.\; u\cap(\pi-\breve{\pi} \cup \delta p)\varepsilon\mathrm{Elm}$

[$x\varepsilon u-\breve{\pi}u \;.\!\supset\!.\; u=\iota x \cup \pi^{N}x$ (1)

(1) . Prop 7·41 .⊃. $u-\iota x \cap \delta p=\Lambda$ (2)

(1) . Prop 7·45 .⊃. $\pi_{\iota}^{N}x=\Lambda \;.\!\supset\!.\; \pi_{\iota}x=\Lambda \;.\!\supset\!.\; x\varepsilon\delta p \cup \pi-\breve{\pi}$ (3)

(2) . (3) .⊃. Prop]

·51 $P\varepsilon\Omega \,.\, u,v\varepsilon\partial p \,.\, u-=v \,.\, \exists u \cap \pi v \;.\!\supset\!.\; u\supset v\pi$

[Hp . Prop 7·47 .⊃. $u\cap v=\Lambda$ (1)

Prop 7·48 . $x,y\varepsilon u \;.\!\supset\!.\; \breve{\pi}x \cap \pi y\supset u$ (2)

$\exists u\cap\pi v \,.\, \exists u\cap\breve{\pi}v \;.\!\supset\!.\; \exists v\cap\pi u \,.\, \exists v\cap\breve{\pi}u$ (3)

(2) . (3) .⊃: $\exists u\cap\breve{\pi}v \;.\!\supset\!.\; \exists u\cap v$ (4)

(1) . (4) .⊃. $u\cap\breve{\pi}v=\Lambda$ (5) (1) . (5) .⊃. Prop]

·52 $P\varepsilon\Omega \;.\!\supset\!:\; u\partial Pv \;.\!=\!.\; u,v\varepsilon\partial p \,.\, u\supset v\pi$ Df

∂p est la classe des progressions qui partent du premier terme de la série p, ou d'un terme quelconque de la première dérivée, pour continuer aussi longtemps qu'on n'arrive pas à un nouveau terme de la première dérivée. La relation ∂P est la relation de précéder parmi ces progressions. Il faut observer cependant, que le dernier terme de ∂p, c'est à dire $\iota\partial\breve{\pi}-\partial\pi$, s'il existe, n'est pas en général une progression, mais une série finie, ou même un seul terme.

·53 $P\varepsilon\Omega \,.\, x\varepsilon\delta p \;.\!\supset\!.\; \exists\partial p \cap u\ni(x\varepsilon u-\breve{\pi}u)$

[Hp .⊃. $\exists\partial p\cap u\ni(x\varepsilon u \,.\, \pi_{\iota}x=\Lambda)$.⊃. Prop]

·54 $P\varepsilon\Omega \;.\!\supset\!.\; \pi_{\iota}^{N}-\breve{\pi}_{\iota}^{N} = \pi-\breve{\pi} \cup \delta p$ [Prop 7·5·53 .⊃. Prop]

·55 $P\varepsilon\Omega \;.\!\supset\!.\; \lambda\partial P = 1+\lambda P^{(1)}$ [Prop 7·52·54 .⊃. Prop]

·6 $P\varepsilon\Omega$ infin$-\omega \;.\!\supset\!.\; P_{\omega} = \mathrm{Rel} \cap R\ni\{\exists\partial\pi \cap u\ni(R=P_{uu})\}$ Df

·61 $P\varepsilon\Omega$ infin$-\omega \,.\, \pi(\delta p)=u \;.\!\supset\!.\; P_{uu} = \Sigma\partial\pi P\omega$

$\partial\pi$ signifie toutes les classes ∂p excepté la derniére, s'il y en a une.

·62 $P\varepsilon\Omega \,.\, \breve{\pi}\supset\pi \;.\!\supset\!.\; \lambda P = \omega\times\lambda\partial P$ [Prop 7·44·55·61 .⊃. Prop]

·63 $P\varepsilon\Omega \,.\, \exists\breve{\pi}-\pi \,.\, \partial\pi-\partial\breve{\pi}=u \,.\, n\varepsilon\mathrm{No\ fin} \,.\, P_{uu}\varepsilon n \;.\!\supset\!.$

$\lambda P = \omega\times\lambda P^{(1)}+n$ [Prop 4·24 7·44 55·61 .⊃. Prop]

On doit mettre $\lambda P^{(1)}=1$ quand δp contient un seul terme.

7·64 $P\varepsilon\Omega\,.\,\partial\pi = \partial p\;.\supset.\;\lambda P = \omega \times \lambda P^{(1)}$ [Prop 7·55·62 $.\supset.$ Prop]

·65 $m,n\,\varepsilon\,\mathrm{No\,fin}-\iota 0\,.\,P\varepsilon\omega\times m+n\;.\supset.\;P^{(1)}\varepsilon m$

[Hp $.\supset.\;\exists\Omega\cap R\ni(R\varepsilon m\,.\,r\varepsilon \mathrm{Cls}'\omega\mathrm{Excl}\,.\,\lambda P = \lambda\Sigma_R\, r+n)$ (1)

$R\varepsilon m\,.\,r\varepsilon\mathrm{Cls}'\omega\mathrm{Excl}\,.\,r_s\supset p\,.\,p-r_s = v\,.\,\lambda P = \lambda\Sigma_R\, r+n\;.\supset.$

$P = \Sigma_R\, r + P_{vv}$ (1)

(2) . Prop 4·15 $.\supset.\;\delta p = x\ni\{\exists\,\breve{\varrho}\cap P'\ni(x1'\iota\pi'-\breve{\pi}')\cup x1'\iota v-\breve{\pi}v\}\;.\supset.$

$P^{(1)}\varepsilon m\;.\supset.$ Prop]

Pour la Df de r_s, voir Prop 6·5. La preuve des Prop suivantes est semblable à celle de 7·65.

·66 $n\varepsilon\,\mathrm{No\,fin}-\iota 0\,.\,P\varepsilon\omega\times n\;.\supset.\;\lambda P^{(1)} = n-1$

·67 $a\varepsilon\,\mathrm{No\,infin}\,.\,P\varepsilon\omega\times a\;.\supset.\;\lambda P^{(1)} = a$

✱ 8. $P\varepsilon\Omega\;.\supset::$

·1 $\delta^2 p = \delta\{p^{(1)}\}$ Df

$\delta^2 p$ est la deuxième dérivée de p. Pour la Df de $P^{(1)}$, voir Prop 4·2.

·11 $P^{(2)} = P\delta^2 p\delta^2 p$ Df

·12 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\exists\mu_1 a\;.\supset.\;\delta^a p = \delta\{p^{(\iota\mu_1 a)}\}$ Df

Cette Df affirme que, si a est un nombre ordinal qui a un prédécesseur immédiat, alors la $a^{\text{ème}}$ dérivée de p est la dérivée de la $a-1^{\text{eme}}$ derivée prise dans l'ordre généré par la relation P.

·13 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\exists\mu_1 a\;.\supset.\;P^{(a)} = P\delta a p\delta a p$ Df

·14 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\mu_1 a = \Lambda\;.\supset.\;\delta^a p = \cap' x\ni\{\exists\mu a\cap\beta\ni(x = \delta^\beta p)\}$ Df

Cette Df affirme que si a est un nombre ordinal de la deuxième espèce (c'est à dire sans prédécesseurs immédiat), la $a^{\text{ème}}$ dérivée est le produit logique des dérivées d'ordre plus petit que a.

·15 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\mu_1 a = \Lambda\;.\supset.\;P^{(a)} = P\delta a p\delta a p$ Df

On a maintenant défini par induction (dans le sans de la Prop 6·1) la dérivée d'un ordre quelconque, ainsi que sa relation génératrice. La généralité de la Df résulte de la Prop 6·28.

·2 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\exists\mu_1 a\,.\,\sum_{x\varepsilon\mu a}\omega^x = \omega^{\iota\mu_1 a}\;.\supset.\;\sum_{x\varepsilon\mu a\cup\iota a}\omega^x = \omega^a$

[$\omega^{\iota\mu_1 a}+\omega^a = \omega^{\iota\mu_1 a}(1+\omega) = \omega^a\;.\supset.$ Prop]

·21 $a\varepsilon\mathrm{No}\,.\,\mu_1 a = \Lambda : \beta\varepsilon\mu a\;.\supset_\beta.\;\sum_{x\varepsilon\mu\beta\cup\iota\beta}\omega^x = \omega^\beta\;:\supset.\;\sum_{x\varepsilon\mu a}\omega^x = \omega^a$

[$y\varepsilon\mu\sum_{x\varepsilon\mu a}\omega^x\,.\,\mu_1 a = \Lambda\,.$ Prop 5·53.6·26$\supset.\;\exists\mu a\cap\beta\ni\{y\varepsilon\mu\sum_{\mu\beta\cup\iota\beta}\omega^\beta\}$ (1)

(1) . Hp .⊃. $\exists \mu a \frown \beta \ni (y \varepsilon \mu\omega\beta)$ (2)

(1) . (2) . Prop 6·33 .⊃. Prop]

·22 $a\varepsilon$No . $\exists \mu_1 a$.⊃. $\sum_{x\varepsilon\mu a \cup \iota a} \omega^x = \omega^a$ [$\omega = 1+\omega$. Prop 6·1.8·2·21 .⊃. Prop]

·23 $a\varepsilon$No.$\mu_1 a = \Lambda$.⊃. $\sum_{x\varepsilon\mu a} \omega^x = \omega^a$ [Prop 6·1.8·21·22 .⊃. Prop]

·24 $a\varepsilon$No .⊃. $\sum_{x\varepsilon\breve{\mu}_1(\mu a)} \omega^x = \omega^a$ [Prop 8·22·23 .⊃. Prop]

Voir 5·13, note. Il s'ensuit de Prop. 8·23 que $\sum_{x\varepsilon \text{No fin}} \omega^x = \omega^\omega$.

·3 $m\varepsilon$No fin $-\iota 0 - \iota 1$. P$\varepsilon\omega^m$.⊃: $\delta^m p = \Lambda$: nMm .⊃$_n$. $\exists \delta^n p$

[P$\varepsilon\omega^m$. Prop 6·61.7·67 .⊃.P$^{(1)}\varepsilon\ \omega^{m-1}$ (1) (1) . Induct.⊃. Prop]

·31 $m\varepsilon$ No fin $-\iota 0$. ω^mMλP . (λP)Mω^{m+1} .⊃. $\exists \delta^m p$. $\delta^{m+1} p = \Lambda$

·32 P$\varepsilon\omega^\omega$.⊃∴ $n\varepsilon$ No fin .⊃$_n$. $\exists \delta^n p$: $\delta^\omega p = \Lambda$

[Prop 4·15.8·23·3 .⊃: $n\varepsilon$ No fin .⊃$_n$. $\exists \delta^n p$ (1)

P$\varepsilon \sum_{n\varepsilon \text{No fin}} \omega^n$. $x\varepsilon p$.⊃. $\exists$No fin $\frown m\ni\{\text{P}_{\pi x \pi x}\text{M}\omega^m\}$.

.⊃. $\exists$No fin $\frown m\ni\{\pi x \frown \delta^m p = \Lambda\}$ (2)

(2) . $\pi = p$. Prop 8·14 .⊃. $\delta^\omega p = \Lambda$ (3) (1) . (3) .⊃. Prop]

·33 P $\varepsilon\ \omega^\omega$. $n\varepsilon$No fin .⊃. P$^{(n)}$ $\varepsilon\ \omega^\omega$

[Prop 7·67.8·23 .⊃. P$^{(1)}\varepsilon \sum_{n\varepsilon \text{No fin}} \omega^n$ (1) (1) Induct .⊃. Prop]

·34 P$\varepsilon\ \omega^\omega + 1$.⊃. $\delta^\omega p = \breve{\pi} - \pi$

[Hp .⊃. $\delta p\ \varepsilon\ \omega^\omega + 1$. $\breve{\pi} - \pi \supset \delta p$ (1)

(1) . Induct . $n\varepsilon$No fin .⊃. $\breve{\pi} - \pi \supset \delta^n p$ (2) (2) . Prop 8·14 .⊃. Prop]

·35 P$\varepsilon\Omega$: $n\varepsilon$ No fin .⊃$_n$. $\exists \delta^n p$: $\delta^\omega p = \Lambda$:⊃. P$\varepsilon\omega^\omega$

[(λP)Mω^ω .⊃. $\exists$No fin $\frown m\ni\{(\lambda \text{P})\text{M}\omega^m\}$.⊃. $\exists$No fin $\frown m\ni(\delta^m p = \Lambda)$ (1)

ω^ωM(λP) .⊃. $\exists$Rel'P $\frown (\omega^\omega + 1)$.⊃. $\exists \delta^\omega p$ (2) (1) . (2) .⊃. Prop]

·4 $x\varepsilon$No : P$\varepsilon\omega^x$.⊃$_{\text{P}}$.$\delta^x p = \Lambda$:⊃: P'$\varepsilon\omega^{x+1}$.⊃$_{\text{P'}}$. $\delta^{x+1} p' = \Lambda$

[$\omega^{x+1} = \omega^x \times \omega$. Hp .⊃:

R$\varepsilon\omega$. $r\varepsilon$ Cls'ω^x Excl .⊃. $\Sigma_{\text{R}} r\ \varepsilon\ \omega^{x+1}$ (1)

(1) . Prop 4·15 . P'$= \Sigma_{\text{R}} r$.⊃. $\delta p' = \cup'\ \delta r \cup y\ni\{\exists \breve{\varrho} \frown \text{R}'\ni(y = \iota\varrho' - \breve{\varrho}')\}$ (2)

$\mathrm{Hp} \,.\, (2) \,.\, \mathrm{Prop}\ 6{\cdot}1 .\supset. \delta^x p' = y\ni\{\exists \breve{\varrho} \cap \mathrm{R}'\ni(y = \iota\varrho - \breve{\varrho}')\}$ (3)

$(3) . \mathrm{R}'\varepsilon\omega .\supset. \mathrm{P}'^{(x)}\varepsilon\omega .\supset. \delta^{x+1}p' = \Lambda$]

·41 $v \supset \mathrm{No} \,.\, v \supset \mu v \,.\, x = \mathrm{seq}v : y\varepsilon v \,.\, \mathrm{P}\varepsilon\omega^y .\supset_{y,\mathrm{P}} .\delta^y p = \Lambda :\supset:$

$\mathrm{P}'\varepsilon\omega^x .\supset_{\mathrm{P}'}. \delta^x p' = \Lambda$

[$\mathrm{Hp} \,.\, \mathrm{Prop}\ 8{\cdot}23 \,.\, \mathrm{P}'\varepsilon\omega^x .\supset. \mathrm{P}'\varepsilon \sum_{z\varepsilon v} \omega^z$ (1)

$(1) \,.\, a\varepsilon p' .\supset. \exists \varsigma \mathrm{P}' \cap \mathrm{P}\ni\{a\varepsilon p \,.\, y\varepsilon v \,.\, \mathrm{P}\varepsilon \sum_{z\varepsilon\mu y \cup \iota y} \omega^z\}$ (2)

$(2) \,.\, \mathrm{Prop}\ 4{\cdot}15 .\supset. \exists v \cap y\ni(a - \varepsilon\, \delta^y p')$ (3)

$(3) \,.\, \mathrm{Prop}\ 8{\cdot}14 .\supset. \delta^x p' = \Lambda .\supset. \mathrm{Prop}$]

·42 $x\varepsilon\mathrm{No} \,.\, \mathrm{P}\varepsilon\omega^x .\supset: \delta^x p = \Lambda : y\varepsilon\mu x .\supset_y . \exists\delta^y p$

[$\mathrm{Prop}6{\cdot}1 \,.\, 8{\cdot}3{\cdot}32{\cdot}4{\cdot}41 .\supset. \mathrm{Prop}$]

Pour la preuve il faut ajouter à 8·4 la proposition

$x\varepsilon\mathrm{No} : \mathrm{P}\varepsilon\omega x \,.\, y\varepsilon\, \mu x .\supset_{\mathrm{P},y} . \exists\delta^y p :\supset: \mathrm{P}'\varepsilon\omega^{x+1} \,.\, y'\varepsilon\, \mu x \cup \iota x .\supset_{\mathrm{P}',y'} . \exists\delta^{y'} p$

qui se démontre très simplement.

·43 $x\varepsilon\mathrm{No} \,.\, \mathrm{P}\varepsilon\, \omega^x + 1 .\supset. \exists\delta^x p$

[$\mathrm{Prop}\ 8{\cdot}24{\cdot}42 .\supset. \breve{\pi} - \pi = \delta^x p .\supset. \mathrm{Prop}$]

·44 $x\varepsilon\mathrm{No} . \mathrm{P}\varepsilon x .\supset: \delta^x p = \Lambda .=. \lambda\mathrm{P}\, \varepsilon\, \mu(\omega^x + 1)$

[$\mathrm{Prop}\ 8{\cdot}42{\cdot}43 .\supset. \mathrm{Prop}$]

·5 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega .\supset. \mathrm{No} \cap x\ni\{\exists\delta^x p\}\ \varepsilon\ \varsigma m$ [$\mathrm{Prop}\ 8{\cdot}44 .\supset. \mathrm{Prop}$]

Cette proposition affirme que les nombres des dérivées non nulles d'une série quelconque forment un segment de la série des nombres.

·51 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega .\supset. \varDelta p = u\ni\{\exists\mathrm{No} \cap x\ni(\exists\delta^x p \,.\, u = \delta^x p)\}$ Df

·52 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega .\supset. \mathrm{No}(\varDelta p) = \mathrm{No} \cap x\ni(\exists\delta^x p)$ Df

·53 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega .\supset\therefore a = \mathrm{seqNo}(\varDelta p) .=: \lambda\mathrm{P}\varepsilon\ \mu(\omega^a + 1) :$

$\beta\mathrm{M}a .\supset_\beta. \omega^\beta\, \mathrm{M}(\lambda\mathrm{P})$ [$\mathrm{Prop}8{\cdot}44 .\supset. \mathrm{Prop}$]

·54 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega \,.\, a = \mathrm{seqNo}(\varDelta p) .\exists\mathrm{No} \cap \beta\ni(\lambda\mathrm{P} = \omega^\beta) .\supset. \lambda\mathrm{P} = \omega^a$

[$\mathrm{Prop}\ 8{\cdot}53 .\supset. \mathrm{Prop}$]

Cette proposition affirme que si un nombre est un puissance de ω, l'index de la puissance est la plus petit nombre pour lequel la dérivée d'une série qui a le nombre donné est nulle.

✻ 9·1 $\omega_1 = \Omega \cap \mathrm{P}\ni\{u \supset p .\supset: u\varepsilon a_0 \cup \mathrm{Cls\ fin} .=. \exists u\breve{\pi}\}$ Df

·11 $a_1 = \mathrm{Cls} \frown u \ni \{ \exists \omega_1 \frown \mathrm{P} \ni (u = p) \}$ Df

ω_1 est le premier nombre ordinal de la troisième classe, selon le langage de Cantor. ω_1 est la classe des séries telles que toute classe finie ou dénombrable contenue dans une telle série a des successeurs, et que toute classe qui a des successeers est finie ou dénombrable (cf. Prop 1·44). a_1 est le premier des nombres cardinaux plus grands que a_0. Mais il est nécessaire avant tout de prouver que ω_1 est un nombre ordinal.

·2 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . \varsigma p \supset a_0$

·21 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . p - \varepsilon a_0$ [$u \supset p . u\varepsilon a_0 . \supset . \exists \breve{u\pi} . \supset . \exists p - u . \supset .$ Prop]

·22 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \mathrm{P}'\varepsilon\Omega . p'\varepsilon a_0 . \supset . \exists \varsigma \mathrm{P} \frown \lambda \mathrm{P}'$ [Prop5·47 . 9·21 $. \supset .$ Prop]

·23 $\mathrm{No}(a_0) = \mathrm{No} \frown \beta \ni \{ \mathrm{P}\varepsilon\beta . \supset . p\varepsilon a_0 \}$ Df

·24 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . m_p = \mathrm{No}(a_0) \cup \mathrm{No\ fin}$

[Prop 6·2·21·22 . 9·22·23 $. \supset .$ Prop]

Cette proposition montre que les nombres moindres que ω_1 sont les mêmes que les nombres finis et les types qui se forment avec une classe dénombrable.

·25 $\omega_1 \varepsilon \mathrm{No}$ [$\mathrm{P}, \mathrm{P}'\varepsilon\omega_1$. Prop 9·24 $. \supset . m_p = m_{p'}$ (1)

(1) . Prop 6·23 $. \supset .$ Prop]

·26 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . \mathrm{M}_p \varepsilon\omega_1$ [Prop 6·23 $. \supset .$ Prop]

Cette proposition affirme que la série des nombres ordinaux moindres que ω_1, en ordre de grandeur croissante, est du type ω_1.

·27 $\mathrm{P}\varepsilon\Omega : x\varepsilon p . \supset . \pi x\ \varepsilon a_0 \cup \mathrm{Cls\ fin} :$

$$u \supset p . \pi u \varepsilon a_0 . \supset_u . \exists \breve{u\pi} : \supset . \mathrm{P}\varepsilon\omega_1$$

·28 $\mathrm{Nc}'\mathrm{No}(a_0) = a_1$ [Prop 9·11·24·26 $. \supset .$ Prop]

·3 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . \pi = p$ [$x\varepsilon p . \supset . \pi x \varepsilon a_0 . \supset . \pi x \cup \iota x\ \varepsilon a_0 . \supset . \exists \breve{x\pi} . \supset . x \varepsilon \pi$]

·31 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . u \supset p . \exists u . \breve{u\pi} = \Lambda . \supset . \mathrm{P}_{uu} \varepsilon\omega_1$

[$x\varepsilon u . \supset . \pi_{uu}\, x \supset \pi x . \supset . \pi_{uu}\, x\ \varepsilon a_0 \cup \mathrm{Cls\ fin}$ (1)

$v \supset u . \pi v\ \varepsilon a_0 . \supset . \exists \breve{v\pi}$ (2) (2) . $\breve{u\pi} = \Lambda . \supset . \exists \breve{v\pi}_{uu}$ (3)

(1) . (3) . Prop 9·27 $. \supset .$ Prop]

·32 $a\varepsilon \mathrm{Nc} . a < a_1 . \supset . a \leqq a_0$

[$u\varepsilon a$. $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1$. $u \supset p$. Prop 9·31 . Transp $. \supset . \exists \breve{u\pi} . \supset .$ Prop]

·33 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . \breve{(\delta p)\pi} = \Lambda$

[$x\varepsilon\delta p$. Prop 9·3 $.\supset.$ $\exists \breve{\pi} x$ (1)

(1) . Prop 9·31 $.\supset.$ $\mathrm{P}_{\breve{\pi}x\breve{\pi}x}\,\varepsilon\omega_1$ $.\supset.$ $\exists \delta p \cap \breve{\pi} x$ $.\supset.$ Prop]

·34 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 \,.\, u \supset p \,.\supset\colon \mathrm{P}_{\prime\prime u}\varepsilon\omega_1 \,.=.\, u\breve{\pi} = \Lambda$ [Prop 9·1·31 $.\supset.$ Prop]

·35 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 \,.\supset.\, \mathrm{P}^{(1)}\varepsilon\omega_1$ [Prop 9·31·33 $.\supset.$ Prop]

·36 $\mathrm{P}\varepsilon\omega_1 \,.\, n\varepsilon\, \mathrm{No\ fin} \,.\supset.\, \mathrm{P}^{(n)}\varepsilon\omega_1$ [Prop 9·35 . Induct $.\supset.$ Prop]

·4 $\omega^2\ \varepsilon\ \mathrm{No}(a_0)$

[$\mathrm{Q},\mathrm{Q}'\varepsilon\omega \,.\, qq' = \Lambda \colon x\varepsilon q \,.\supset_x.\, u_x = \mathrm{Cls} \cap v\ni\{\exists q' \cap y\ni(v = \iota x \cap \iota y)\}\colon$

$u_q = w\ni\{\exists q \cap x\ni(w = u_x)\} \,.\, u = \cup`u_q \colon\supset\colon\colon\colon$

$x,y\varepsilon q \,.\supset_{x,y}\colon u_x \mathrm{P} u_y \,.=.\, x\mathrm{Q}y \,.\cdot.\, x\varepsilon q \,.\, y,z\varepsilon q' \,.\supset\colon \iota x \cup \iota y \mathrm{P}'_x \iota x \cup \iota z \,.=.\, y\mathrm{Q}'z .\cdot$

$\mathrm{K} = \mathrm{P}\ni\{\exists q \cap x\ni(\mathrm{P} = \mathrm{P}'_x)\} \,.\, \Sigma_p \mathrm{K} = \mathrm{R} .\cdot.\supset.\, \mathrm{R}\varepsilon\omega^2 \,.\, r = u$ (1)

$\mathrm{S},\mathrm{S}'\varepsilon\, 1\to 1 \,.\, \sigma = \sigma' = \mathrm{No\ fin} \,.\, \mathrm{Q} = \breve{\mathrm{S}}\mathrm{M}\mathrm{S} \,.\, \mathrm{Q}' = \breve{\mathrm{S}}'\mathrm{M}\mathrm{S}' \colon\colon$

$v\mathrm{R}'v' \,.=.\cdot.\, v,v'\varepsilon u \,.\cdot.\, v = \iota x \cup \iota y \,.\, v' = \iota x' \cup \iota y' \,.\, x\varepsilon q \,.\, x'\varepsilon q \,.$

$\supset\colon \iota\sigma x + \iota\sigma' y\ \mathrm{M}\,\iota\sigma x' + \iota\sigma' y' \,.\cup.\, \iota\sigma x + \iota\sigma' y = \iota\sigma x' + \iota\sigma' y' \,.\, y\mathrm{Q}'y' \colon\colon$

$\supset.\, \breve{\varrho}' \supset \varrho' \,.\, \breve{\varrho}'_1 = \breve{\varrho}'$ (2)

(2) . Prop 1·43 $.\supset.$ $\mathrm{R}'\varepsilon\omega$ (3)

(1) . (3) . $r' = u$ $.\supset.$ Prop]

Cette preuve peut se traduire en mots de la manière suivante.

Prenons deux progressions, dont les relations génératrices sont Q Q'. Soit x un terme de q, et soit u_x la classe des couples dont un terme est x, et l'autre est un terme variable de q'. Rangeons ces couples dans l'ordre qui résulte de la relation Q' entre les termes prises de q'. Soit u_q la classe de toutes les classes q_x, et u la classe de tous les couples dont un terme appartient à q et l'autre à q'. Rangeons les classes u_q selon l'ordre des termes de q qui entrent dans leur définition. Il résulte un ordre de u qui est du type ω^2, puisqu'il est formé par une progression de progressions. Mais on peut aussi arranger la classe u de la façon suivante. Si x et y sont les termes qui composent un couple u_{xy} de la classe u, et si x est le $m^{\text{ème}}$ terme de q et y le $n^{\text{ème}}$ de q', on peut prendre d'abord les couples pour lesquels $m+n$ est moindre, ensuite ceux pour lesquel $m+n$ est plus grand ; et pour deux couples qui donnent la même valeur de $m+n$, on prendra d'abord celui pour lequel n est moindre. Il résulte que la classe u forme une progression. Donc elle a le nombre cardinal a_0, ce qu'il fallait démontrer.

·41 $a_0^{\,2} = a_0$ [Prop 9·4 Dem $.\supset.$ Prop]

·42 $n \varepsilon$ No fin $. \supset . \omega^n \varepsilon \text{No}(a_0)$ [Prop 9·5 . Induct $. \supset .$ Prop]

·43 $n \varepsilon$ Nc fin $. \supset . a_0{}^n = a_0$ [$\text{P}\varepsilon\omega^n . \supset . p\varepsilon a_0{}^n : \supset .$ Prop]

Il ne faut pas inférer de $\omega^\omega \varepsilon \text{No}(a_0)$ que $a_0{}^{a_0} = a_0$, ce qui serait faux.

·44 $\omega^\omega \varepsilon \text{No}(a_0)$

[Prop8·23 $. \supset . \omega^\omega = \sum_{n\varepsilon \text{No fin}} \omega_n$

(1) . Prop 9·41·42 $. \supset .$ Prop]

·45 $x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . \omega^x \varepsilon \text{No}(a_0)$

[Prop 9·41 $. \supset : \omega^x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset_x . \omega^{x+1} \varepsilon \text{No}(a_0)$ (1)

$u \supset \text{No}(a_0) . u \supset \mu u : x = \text{seq}\, u . x \varepsilon \text{No}(a_0) : y \varepsilon u . \supset_y . \omega^y \varepsilon \text{No}(a_0) :$

Prop 8·23 . 9·41·42 $: \supset . \omega^x \varepsilon \text{No}(a_0)$ (2)

(1) . (2) . Prop 6·1 . 9·44 $. \supset .$ Prop]

·46 $x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . \exists\, \text{No}(a_0) \cap y \ni (x \,\text{M}\, \omega^y)$

[$x = \omega^x . \cup . x \text{M} \omega^x$: Prop 9·45 $: \supset .$ Prop

On présuppose ici la Prop 10·1.

·47 $x \varepsilon \text{No}(a_0) . \text{P}\varepsilon x . \supset . \exists\, \text{No}(a_0) \cap y \ni (\delta^y x = \Lambda)$

[Prop 8·44 . 9·46 $. \supset .$ Prop]

·48 $\text{P}\varepsilon\Omega . \exists\, \text{No}(a_0) \cap x \ni (\delta^x p = \Lambda) . \supset . \lambda\text{P} \varepsilon \text{No}(a_0) \cup$ No fin

[Prop 8·44 . 9·45 $. \supset .$ Prop]

·49 $x \varepsilon \text{No} . \supset : x \varepsilon \text{No}(a_0) \cup$ No fin $. = . \exists\, \text{No}(a_0) \cap y \ni (\text{P}\varepsilon x .$
$\supset . \delta^y p = \Lambda)$ [Prop 9·47·48 $. \supset .$ Prop]

·5 $\text{P}\varepsilon\omega_1 . x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . \exists\, \delta^x p$ [Prop 9·21·49 $. \supset .$ Prop]

·51 $\text{P}\varepsilon\omega_1 . x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . \text{P}^{(x)} \varepsilon \omega_1$

[Hp . Prop 5·49 $. \supset . \text{P}^{(x)} \leqq \text{P}$ (1)

Prop 9·5 : $x, y \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . x + y \varepsilon \text{No}(a_0) : \supset : y \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset_y . \exists\, \delta^y (\delta^x p)$ (2)

(2) . Prop 9·49 $. \supset . \lambda\text{P}^{(x)} - \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . - (\text{P}^{(x)} < \text{P})$ (3)

(1) . (3) $. \supset .$ Prop]

·52 $\text{P}\varepsilon\omega_1 . x \varepsilon \text{No}(a_0) . \supset . (\delta^x p)\bar{\pi} = \Lambda$ [Prop 9·34·51 $. \supset .$ Prop]

·53 $\text{P}\varepsilon\Omega . \supset . \Delta(a_0)p = u \ni \{\exists\, \text{No}(a_0) \cap x \ni (u = \delta^x p)\}$ Df

·54 $\text{P}\varepsilon\Omega . \supset . \delta^{\omega_1} p = \cap' \Delta(a_0)p$ [Prop 8·14 . 9·24·3 $. \supset .$ Prop]

·55 $\text{P}\varepsilon\omega_1 . \supset . \delta^{\omega_1} p = \Lambda$

[$x \varepsilon p . \supset . \pi x \varepsilon a_0$ (1) $\text{P}\varepsilon\Omega . u \varepsilon \pi p . x \varepsilon u . \supset : x \varepsilon \delta p . = . x \varepsilon \delta p_{uu}$ (2)

(1) . (2) . Prop 9·45·49 $. \supset : x \varepsilon p . \supset_x . \exists\, \text{No}(a_0) \cap y \ni (x - \varepsilon \delta^y p) : \supset .$ Prop]

$\cdot 56 \quad \mathrm{P}\varepsilon\omega_1 \,.{=}\!:\, \delta^{\omega_1} p = \Lambda : x\varepsilon \mathrm{No}(a_0) \,.\supset_x.\, \exists \delta^x p$

[Prop $9\cdot49\cdot51\cdot55$.$\supset$. Prop]

Il résulte de cette proposition que le nombre ordinal des dérivées non nulles d'une série du type ω_1 est lui-même ω_1. Dans le numéro 10, nous allons étudier la classe des nombres ordinaux qui ont cette propriété, c'est à dire, des nombres a tels que la série des dérivées est du type a. Les propositions du numéro 10 se trouvent pour la plupart dans § 20 du mémoire de Cantor dejà cité.

❋ $10\cdot1 \quad a\varepsilon\, \mathrm{No} \,.\supset\!:\, a = \omega^a \,.\cup.\, a\mathrm{M}\omega^a$

[$a\varepsilon\, \mathrm{No\ fin} \,.\supset.\, a\mathrm{M}\omega^a$ (1) $\quad a\mathrm{M}\omega^a \,.\supset.\, a+1\ \mathrm{M}\ \omega^{a+1}$ (2)

$a=\omega^a \,.\supset.\, a+1\mathrm{M}\omega^{a+1}$ (3)

$a\varepsilon\mathrm{No} \,.\, \mu_1 a = \Lambda \,.\, u=\mu a \,.\, v = x\ni\{\exists\, u \frown y\ni(x=\omega^y)\} \,.\supset.\, \omega^a = \mathrm{seq}\, v \,.\supset\!::$

$y\varepsilon u \,.\supset_y\!:\, y=\omega^y \,.\cup.\, y\mathrm{M}\omega^y \,.\because.\supset\!:\, a=\omega^a \,.\cup.\, a\mathrm{M}\omega^a$ (4)

(1) . (2) . (3) . (4) . Prop$6\cdot1$.$\supset$. Prop]

$\cdot 11 \quad \mathrm{e} = \mathrm{No} \frown a\ni(a=\omega^a)$ Df

$\cdot 12 \quad \mathrm{P}\varepsilon\omega \,.\, p \supset \mathrm{No} \,.\, \iota\pi - \breve{\pi} -\varepsilon\, \mathrm{e}\cup\iota 0\cup\iota 1 : a\mathrm{P}_1\beta \,.$

$\supset.\, \beta=\omega^a \,:\supset.\, \mathrm{seq}\, p = \omega^{\mathrm{seq}\, p}$

[$\mathrm{seq}\, p = \mathrm{seq}\,\pi = \mathrm{seq}\,\breve{\pi}$. Prop$6\cdot32$.$\supset$. Prop]

$\cdot 13 \quad \mathrm{Hp}10\cdot12 \,.\, \iota\pi - \breve{\pi}\ \varepsilon\ \mathrm{No}(a_0) \,.\supset.\, \mathrm{seq}\, p\ \varepsilon\ \mathrm{No}(a_0)$

[$a\varepsilon p$. Prop$9\cdot45$.$\supset$: $a\varepsilon\, \mathrm{No}(a_0) \,.\supset.\, \iota\breve{\pi}_1 a\ \varepsilon\ \mathrm{No}(a_0)$ (1)

(1) . $\iota\pi - \breve{\pi}\ \varepsilon\ \mathrm{No}(a_0)$. Induct .$\supset$. $p \supset \mathrm{No}(a_0)$ (2)

(2) . $p\varepsilon a_0$. Prop$9\cdot24$.$\supset$. $\exists\, \mathrm{No}(a_0)\frown p\breve{\mu}$.$\supset$. Prop]

$\cdot 14 \quad a\varepsilon\, \mathrm{No} \,.\, \mathrm{P}\varepsilon a \,.\supset\!:\, a\varepsilon\mathrm{e} \,.{=}.\, \mathrm{No}(\Delta p) = \mu a$ [Prop$8\cdot53\cdot54$.$\supset$. Prop]

Il résulte que les nombres de la classe e sont ceux dont les séries sont semblables aux séries de leurs dérivées.

$\cdot 15 \quad \omega_1 = \omega^{\omega_1}$ [Prop$9\cdot56.10\cdot14$.$\supset$. Prop]

$\cdot 2 \quad a\varepsilon\, \mathrm{No} - \mathrm{e} \,.\supset.\, \mathrm{e}a = \iota\mathrm{e} \frown \beta\ni\{\mathrm{P}\varepsilon\omega \,.\, \iota\pi - \breve{\pi} = a : \gamma\mathrm{P}_1\delta \,.$

$\supset.\, \delta = \omega\gamma \,:\supset.\, \beta = \mathrm{seq}\, p\}$ Df

$\cdot 21 \quad a\varepsilon\mathrm{e} \,.\supset.\, \mathrm{e}_a = a$ Df

$\cdot 22 \quad n,n'\varepsilon\, \mathrm{No\ fin} - \iota 0 - \iota 1 \cup \iota\omega \,.\supset.\, \mathrm{e}_n = \mathrm{e}_{n'}$

[Hp . $n\mathrm{M}n'$.$\supset$. $\omega^n\mathrm{M}\omega^{n'}$. $n'\mathrm{M}\omega^n$ (1)

(1) . Induct . $\mathrm{P},\mathrm{P}'\varepsilon\omega \,.\, \iota\pi - \breve{\pi} = n \,.\, \iota\pi' - \breve{\pi}' = n' : a\mathrm{P}_1\beta \,.$

$\supset.\, \beta=\omega^a : a\mathrm{P}'_1\beta \,.\supset.\, \beta=\omega^a \,:\supset\!:\, a\varepsilon p \,.\supset.\, \exists\, p' \frown \breve{\mu}a : a'\varepsilon p' \,.$

$\supset.\, \exists\, p \frown \breve{\mu}a' \,:\supset.\, \mathrm{seq}\, p = \mathrm{seq}\, p' \,.\supset.$ Prop]

·23 $a,\beta\varepsilon No . aM\beta . \beta Me a . \supset . e\beta = ea$

$Hp . P,P'\varepsilon\omega . 1\pi\text{-}\breve{\pi} = a . 1\pi'\text{-}\breve{\pi}' = \beta : \gamma P_1\delta . \supset . \delta = \omega\gamma : \gamma P'_1\delta . \supset . \delta = \omega\gamma :$

$\supset . \exists p \frown \breve{\mu p'} . \exists p' \frown \breve{\mu p}$ (1)

$Hp(1) . \gamma\varepsilon\, p \frown \breve{\mu p'} . \supset . e_\gamma = e_a$ (2)

$aM\beta . \beta M\gamma . \supset : e_a = e_\beta . \cup . e_a Me_\beta : e_\beta = e_\gamma . \cup . e_\beta Me_\gamma$ (3)

(2) . (3) . ⊃ . Prop]

·24 $a,\beta\varepsilon N_0 . ea\, M\beta . \supset . ea\, Me\beta$ [$\beta = e_\beta . \cup . \beta Me_\beta : \supset .$ Prop]

·25 $a,\beta\varepsilon N_0 . \supset : ea = e\beta . = . \beta M(ea + 1) . e \frown \breve{\mu a} \supset \mu\beta$

[Prop10·23·24 . ⊃ . Prop]

·26 $aM(a_0)\beta . = . a,\beta\varepsilon\, No(a_0) . aM\beta$ Df

·27 $Mee \frown M(a_0)\ \varepsilon\ \omega_1$

[Prop10·12·13·24 . $P = Mee \frown M(a_0) . \supset . No(a_0) \frown \breve{p\mu} = \Lambda$ (1)

(1) . Prop9·31 . ⊃ . Prop]

·3 $a,\beta,\delta\varepsilon N_0 . a = e\delta . a\text{-}=\delta . \beta = a+1 . \supset . e \frown \breve{\mu a} \frown \mu e\beta = \Lambda$

C'est à dire, si a est la limite d'une série de la forme définie dans 10·12, et si β est le successeur de a, il n'existe pas de nombre de la classe e entre a et $e\beta$.

[$\gamma\varepsilon e . \supset . \gamma = e_\gamma$

$\gamma\varepsilon\, \breve{\mu a} \frown \mu e_\beta$. Prop10·23 . ⊃ . $e_\gamma = e_\beta . \supset . e_\gamma \text{-}= \gamma$ (2) (1)(2) . ⊃ . Prop]

·31 $P\varepsilon\omega . p\supset e . P\supset M . \supset . seq\, p\ \varepsilon\ e$

[$a\varepsilon p . \supset . a = \omega^a : \supset . seq\, p = seq\, x\ni[\exists p \frown a\ni(x = \omega^a)] = \omega^{seq\, p} . \supset .$ Prop]

·32 $a\varepsilon No . \exists\omega \frown P\ni(P\supset M . p\supset e . seq\, p = a) .$

$\supset . -\exists\mu a \frown \beta\ni(a = e\beta)$

[$Hp . \beta\varepsilon\mu a . \supset . \exists p \frown \gamma\ni(\beta\varepsilon\, \mu\gamma) . \supset : e_\beta = \gamma . \cup . e_\beta M\gamma : \supset .$ Prop]

Il s'ensuit que les nombres de la classe e ne sont pas tous les limites de séries de la forme definie dans 10·12. Il y en a aussi, même parmi les nombres de la deuxième classe, qui sont les limites de séries de nombres de la classe e, sans être les limites d'aucune série de la forme de 10·12. Du reste, d'après 10·15, il y en a qui ne sont les limites d'aucune progression.

Note à la P6·28

« M. Burali-Forti (*Una questione sui numeri transfiniti*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, vol.XI) nie le théoréme 5·47 a cause d'une contradiction qui se trouve dans λM, si $M\varepsilon\Omega$. Cependant la démonstration de 5·47 que donne Cantar paraît concluante. Je préfère donc nier $M\varepsilon\Omega$, dont je ne connais pas de démonstration. Ce théorème ne résulte pas de 6·1 et 6·28, comme on serait tenté de le croire ».

ADDITIONS À F1901.

p.48. Dans la notice sur WIDMAN, je voudrais mettre « particulière » au lieu de « différente ».

p.60. Dans la notice sur DESCARTES, 1644 est probablement une faute de plume au lieu de 1637.

p.74. s_3 a été trouvée par les arpenteurs romains, et la valeur en a été signalée dans le *Codex Arcerianus*; voir CANTOR, *Vorl. über Gesch. d. Mathem.* 1^2 (1894), p.519.-520

p.74,219. ALQACHANI, appelé GIJAT EDDIN AL-KÂSCHÎ par CANTOR (*Vorl. über Gesch d. Mathem.* 1^2 (1894), p.32) et EL-KASI par SUTER (*Die Mathematiker und Astronomen der Araben*, 1900, p.173-174) est mort vers 1436.

p.140,227. La première édition des *Principia* de NEWTON n'a paru qu'en 1687.

p.142. La découverte de la formule $\overset{x=0}{\Big|}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \overset{x=0}{\Big|}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ pour $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ appartient à JEAN I BERNOULLI, bien qu'elle ait été publiée pour la première fois par HÔPITAL; voir p. ex. *Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem.* **25**, 1893-44, p.66-67.

p.177. L'expression pour π donnée par VIÈTE est inexacte; il faut lire

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\,,\quad \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\quad \cdots$$

La correction a été signalée par F. RUDIO dans son écrit: *Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig 1892), p. 34.

p.185. Pour les propositions 6·3 voir BM. 2_3,1901, p.444.

p.220. L'*Algebra* de RAFAEL BOMBELLI a paru en 1572, voir BM. 1893, 15-17.

p.228 (cf.p.60). L'indication que PELL a publié une « Introductio in algebram » dépend d'un malentendu. L'ouvrage cité par WALLIS est une traduction en anglais de RHONIUS (= RAHN): *Teutsche Algebra* (Zürich 1659). Cette traduction, faite par THOMAS BRANCKER et augmentée de note par PELL a été publiée à London en 1668 sous le titre: *An introduction to algebra translated out of the high-dutch into english.*

G. ENESTRÖM.

THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ABSOLUS

(remarques et modifications au *Formulaire*)

par A. Padoa, à Rome

Avant-propos.

En considérant l'emploi qu'on a fait jusqu'ici des symboles logiques, et en décidant de ne pas les employer en d'autres cas on peut insérer dans le F (Formulaire) le P (propositions) qui énoncent ces décisions.

L'application complète de cette méthode offre des avantages très remarquables, même inattendus, dont je m'occupe dans une étude sur la Logique, qui paraîtra prochainement. Ici je me borne à énoncer les P dont je vais me servir dans cet écrit.

Puisque l'on n'a « $x \varepsilon a$ » ou « $\exists a$ » que si « $a \varepsilon \mathrm{Cls}$ », convenons que

* 0·1 $x \varepsilon a \;.\supset.\; a \varepsilon \mathrm{Cls}$ (*)

·2 $\exists a \;.\supset.\; a \varepsilon \mathrm{Cls}$

Puisque l'on n'a « $a \cap b \varepsilon \mathrm{Cls}$ » que si « $a,b \varepsilon \mathrm{Cls}$ », convenons que

·3 $a \cap b \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; a,b\, \varepsilon \mathrm{Cls}$ (**)

Des P·2·3 on déduit les P

·31 $\exists a \cap b \;.\supset.\; a,b\, \varepsilon\, \mathrm{Cls}$ [P·2·3 $.\supset.$ P]

·32 $\exists a \cap b \;.\supset.\; \exists a \,.\, \exists b$ [P·31 . §9 P1·3 $.\supset.$ P] (***)

(*) La légitimité de la P·1 a été reconnue plusieurs fois dans le F (voir, par ex., F1901, p.5, l.2 du bas); mais elle n'y a pas encore été insérée, bien que j'en aie démontré l'utilité dans mes *Note di Logica matematica* (RdM. t.VI, a.1899).

(**) On remarquera que la P·3 est la réciproque de la F1902 §2 P2·1.

(***) La citation des P de la dernière édition du F (a.1902) n'est précédée que par la simple indication du §.

Puisque l'on n'a « $-a \varepsilon \mathrm{Cls}$ » que si « $a \varepsilon \mathrm{Cls}$ », convenons que

·4 $-a \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; a \varepsilon \mathrm{Cls}$ (*)

* * *

Voici quelques P, relatives aux symboles « ι » et « ℩ », dont je me servirai et qui manquent dans le F.

·5 $\iota x \;\varepsilon\; \mathrm{Cls}$ $\quad$ [§1 P·1 . §16 P1·1 $.\supset.$ $x \varepsilon \iota x$. P·1 $.\supset.$ P] (**)

·6 $a = \iota x \;.=:\; x \varepsilon a : z \varepsilon a \;.\supset_z.\; z = x$

[P·5 $.\supset:$ $a = \iota x \;.\supset.\; a \varepsilon \mathrm{Cls}$ (1)

(1) . P·1 . F1901 §6 P·4 $.\supset.$ P]

·7 $\iota x = a{-}b \;.\; b \supset a \;.\supset.\; a = \iota x \cup b \;.\; b = a{-}\iota x$

[Hp . P·5 $.\supset.$ $a{-}b \,\varepsilon \mathrm{Cls}$. P·3 $.\supset.$ $a, -b \,\varepsilon \mathrm{Cls}$. P·4 $.\supset.$ $a, b \,\varepsilon \mathrm{Cls}$ (1)

Hp . (1) $.\supset.$ $\iota x \supset a \;.\; b \supset a \;.\supset.\; \iota x \cup b \supset a$ (2)

Hp . (1) $.\supset.$ $a{-}b \supset \iota x \;.\supset.\; a \supset \iota x \cup b$. (2) $.\supset.$ $a = \iota x \cup b$ (3)

Hp . (1) $.\supset.$ $\iota x \supset -b \;.\supset.\; b \supset -\iota x$ (4)

Hp . (1) . (4) $.\supset.$ $b \supset a{-}\iota x$ (5)

Hp . (3) $.\supset.$ $a \supset \iota x \cup b \;.\supset.\; a{-}\iota x \supset b$. (5) $.\supset.$ $b = a{-}\iota x$]

·8 $x \varepsilon a \;.=.\; \exists a \cap \iota x$ $\quad$ [P·1·31 . F1901 §6 P·7 $.\supset.$ P]

·9 $x \varepsilon a : z \varepsilon a \;.\supset_z.\; z = x \;:\supset.\; x =$ ℩a

[P·1·6 . F1899 §7 P·3 $.\supset.$ P]

INTRODUCTION.

Dans les formules de cet écrit:

N = « nombre entier absolu »

suc = « le successif de » (***).

(*) Cette P est la réciproque de la §7 P1·1.

(**) La P·5 est sous-entendue dans tout le §16; la P « $x \varepsilon \iota x$ » n'est que la §16 P1·2 Dm (4).

(***) Dans les explications et dans les notes j'emploie des écritures du type $x =$«a» qu'on lira: x signifie ce que signifie d'ordinaire a.

Dans cet écrit, je remplace le symbole « N_0 » e la notation « $a+$ » du F par « N » et « suc a ».

Le symbole « suc » avait été employé avec la même signification par M. Burali-Forti dans sa *Logica matematica* (Milano, Hoepli, 1884); je l'ai déjà adopté dans *Numeri interi relativi* (RdM, t.VII, a.1901).

Dans le F la théorie des « N » est développée moyennant 3 symboles primitifs 0 N suc
et 5 Pp (propositions primitives) (*):

❊ 1·1 $0\varepsilon \mathrm{N}$; = §10P1·1 ;

·2 $a\varepsilon \mathrm{N} .\supset. \mathrm{suc}a\,\varepsilon \mathrm{N}$; = ·2 ;

·3 $a,b\,\varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{suc}a=\mathrm{suc}b .\supset. a=b$; = ·4 ;

·4 $a\varepsilon \mathrm{N} .\supset. \mathrm{suc}a \mathrel{-=} 0$; = ·5 ;

·5 $0\varepsilon s : x\varepsilon s .\supset_x. \mathrm{suc}x\,\varepsilon s : \mathrm{N}\supset s$; = ·3 ; (**)

* * *

Ces Pp sont absolument indépendantes entre elles (F1899, p.30); mais ce système de symboles primitifs n'est pas irréductible par rapport au système de Pp (F1902, p.14, l.15-28), car de ce système de Pp on déduit la P·6 qui permet de définir le symbole « 0 » moyennant les deux autres symboles primitifs « N » et « suc »:

·6 $0=\iota\{\mathrm{N}\cap x\ni[-\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=x)]\}$ (***)

$[\ \mathrm{P}{\cdot}4 .=. -\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=0)$ (1)

$\mathrm{P}{\cdot}1 . (1) .\supset. 0\varepsilon\{\mathrm{N}\cap x\ni[-\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=x)]\}$ (2)

$-\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=z) . s=\mathrm{N}-\iota z .\supset.\because (3)\text{-}(7)$

$z\mathrel{-=}0 .\supset. 0\varepsilon-\iota z . \mathrm{P}{\cdot}1 .\supset. 0\varepsilon s$ (3)

$y\varepsilon s .\supset_y . y\varepsilon\mathrm{N} . \mathrm{P}{\cdot}2 .\supset_y. \mathrm{suc}y\,\varepsilon\mathrm{N}$ (4)

$y\varepsilon s .\supset_y . y\varepsilon\mathrm{N}.\supset_y . \mathrm{suc}y\mathrel{-=}z$ (5)

$(4) . (5) .\supset: y\varepsilon s .\supset_y . \mathrm{suc}y\,\varepsilon s$ (6)

$(3) . (6) . \mathrm{P}{\cdot}5 .\supset: z\mathrel{-=}0 .\supset. \mathrm{N}\supset s$ (7)

$-\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=z) . (7) .\supset: z\mathrel{-=}0 .\supset. \mathrm{N}\supset\mathrm{N}-\iota z :\supset:$

$-(z=0) .\supset. -(z\varepsilon\mathrm{N}) :\supset: z\varepsilon\mathrm{N} .\supset. z=0$ (8)

$(8) .=: z\varepsilon\{\mathrm{N}\cap x\ni[-\exists\mathrm{N}\cap y\ni(\mathrm{suc}y=x)] .\supset. z=0$ (9)

$(2) . (9) . \mathrm{P0}{\cdot}9 .\supset. \mathrm{P}\ ]$

(*) Dans mes *Note di Logica matematica* (RdM, t.VI, a.1899) j'ai remarqué la nécessité d'insérer dans la deuxième partie du F (Aritmetique) la P « $\mathrm{N}\varepsilon\mathrm{Cls}$ » ; cette P a été insérée dans les éditions successives (F1901 §20 P4·0, F1902 §10 P1·0), mais comme Pp: tandis que, en acceptant la P0·1 (voir l'*Avant-propos*), on aurait pu la déduire de la P1·1.

Par conséquent, je supprime la P « $\mathrm{N}\varepsilon\mathrm{Cls}$ » parmi les Pp, en revenant ainsi à l'ancien système de Pp (F1898 P002·1-·5, F1899 §20 P2·1-·5).

(**) J'ai supprimé le facteur « $s\varepsilon\mathrm{Cls}$ » de l'Hp de cette P, car moyennant la P0·1 on le déduit de l'autre facteur « $0\varepsilon s$ ».

(***) $0=$ « le N qui n'est le successif d'aucun N ».

* * *

Il n'est pas inutile de remarquer que, puisque

·7 $N_1 = x \ni [\exists N \frown y \ni (\text{suc}\, y = x)]$ (*)

[§11 P2·0 . §11 P1·1 . §10 P3·3 .⊃. P]

la P·6 ne diffère que par la forme de la P

·8 $0 = \imath [N - N_1]$ [P·6·7 .⊃. P] {=§17 P·7} (**)

Et c'est justement aprés avoir écrit cette P (F1899 §22 P·7) que j'ai songé à supprimer « 0 » parmi les symboles primitifs et à construire un système de Pp relatif aux autres symboles (« N », « suc »). (***)

Je vais exposer tout de suite ce systeme, que j'ai déjà énoncé dans mes conférences sur *L'Algebra e la Geometria quali teorie deduttive* (Rome, 1900) (****).

NOUVELLE THÉORIE

Maintenant, les symboles primitifs sont

N suc

et les Pp sont

✱ 2·1 $a \varepsilon N .\supset. \text{suc}\, a\, \varepsilon N$ {= P1·2}

·2 $a, b\, \varepsilon N . \text{suc}\, a = \text{suc}\, b .\supset. a = b$ {= P1·3}

·3 $\exists N \frown x \ni [-\exists N \frown y \ni (\text{suc}\, y = x)]$ (*****)

·4 $\exists s \frown N \frown$ » » $: z \varepsilon s .\supset_z. \text{suc}\, z\, \varepsilon s :\supset. N \supset s$ (******)

(*) N_1 = « nombre entier positif » = « N qui est le successif d'un N ».

(**) 0= « le N qui n'est pas un N_1 ».

(***) Puisque je voulais définir le symbole « 0 », bien que dans le F le symbole « N_0 » soit considéré comme un tout indécomposable, je lui ai préféré le symbole « N ».

(****) C'est dans ces conférences (p.19, §5) que j'ai posé et resolu la question de l'irréductibilité des symboles primitifs d'une théorie par rapport à ses Pp (F1902, p.14, l.11-28).

(*****) « Il y a (au moins) un N qui n'est le successif d'aucun N » (voir P1·6).

(******) « Si parmi les (individus d'une classe (voir P0·31)) s il y a (au moins) un N qui n'est le successif d'aucun N et si le successif de chaque s est un s, alors chaque N est un s ».

Nous avons donc 2 symboles primitifs au lieu de 3, et 4 Pp au lieu de 5 (voir l'Introduction).

* * *

Les nouvelles Pp sont aussi absolument indépendantes entre elles.

En effet, si $a \mathrel{-}= b \,.\, b \mathrel{-}= c \,.\, c \mathrel{-}= a$

l'interprétation:

$N = \iota a \,.\, \mathrm{suc}\, a = b$

ne vérifie pas la P·1 (*), tandis qu'elle verifie les P·2·3·4;

$N = \iota a \cup \iota b \cup \iota c \,.\, \mathrm{suc}\, a = b \,.\, \mathrm{suc}\, b = c \,.\, \mathrm{suc}\, c = b$

ne vérifie pas la P·2 (**), tandis qu'elle vérifie les P·1·3(***)·4;

$N = \iota a \,.\, \mathrm{suc}\, a = a$

ne vérifie pas la P·3, tandis qu'elle vérifie les P·1·2·4 (****)

N= « nombre entier absolu » : $x \varepsilon N \,.\!\supset_x\!.\, \mathrm{suc}\, x =$ « $x+2$ »

ne vérifie pas la P·4 (*****), tandis qu'elle vérifie les P·1·2·3.

* * *

Mais cette fois le système des symboles primitifs est irréductible par rapport au système des Pp.

En effet, l'interprétation

N = « nombre entier absolu » : $x \varepsilon N \,.\!\supset_x\!.\, \mathrm{suc}\, x =$ « $x+1$ »

vérifie les P·1·2·3·4 et continue à les vérifier si l'on remplace la signification de « N » par

N = « nombre entier positif »

ou si l'on remplace la signification de « suc » par

$x \varepsilon N \,.\!\supset_x\!.\, \mathrm{suc}\, x =$ « $x+1+2\times(-1)^x$ » (******).

(*) En effet : « $a \varepsilon N \,.\, \mathrm{suc}\, a \mathrel{-}\varepsilon N$ ».

(**) En effet : « $a, c \varepsilon N \,.\, \mathrm{suc}\, a = \mathrm{suc}\, c \,.\, a \mathrel{-}= c$ ».

(***) La P·3 est verifié car « $a \varepsilon N \,.\, \mathrel{-}\varepsilon N \cap y \ni (\mathrm{suc}\, y = a)$ ».

(****) La P·4 est vérifiée car (la P·3 étant fausse) son Hp ne peut pas être vérifiée.

(*****) En effet, si $s =$ « nombre entier absolu pair »
l'Hp de la P·4 est vérifiée, tandis que la Ths ne l'est pas.

(******) C'est comme si l'on disait de permuter chaque N pair avec son successif ordinaire (dans la suite naturel des N), c'est-à-dire d'ordonner ainsi les N : 1,0,3,2,5,4,...

Par conséquent, il me semble que la nouvelle théorie doit être préférée à l'ancienne.

*
* *

Maintenant, voyons comment la nouvelle théorie se rattache à l'ancienne.

Pour abréger les formules, je définis le symbole « N_1 » (*) par la P

$✽$ 3·1 $N_1 = x \ni [\exists N \cap y \ni (\text{suc}\, y = x)]$ Df ; $=$ P1·7 ;

moyennant laquelle les P2·2·3 deviennent

·2 $\exists N - N_1$ [P·1 $. \supset .$ P2·2 $=$ P] (**)

·3 $\exists s \cap N - N_1 : x \varepsilon s . \supset_x . \text{suc}\, x\, \varepsilon s : \supset . N \supset s$ [P·1 $. \supset .$ P2·3 $=$ P]

Après quoi, on peut démontrer la P

·4 $a, b\, \varepsilon N - N_1 . \supset . a = b$ (***)

[Hp $. a \varepsilon - \iota b . \supset . a \varepsilon (N - \iota b) \cap N - N_1 . \supset . \exists N - \iota b \cap N - N_1$ (1)

Hp $. \supset . b \varepsilon - N_1$. P·1 $. \supset . - \exists N \cap y \varepsilon (\text{suc}\, y = b)$ (2)

Hp . $(x \mid y)$ (2) $. \supset : x \varepsilon N . \supset_x . \text{suc}\, x\, \varepsilon - \iota b$ (3)

Hp . P2·1 . (3) $. \supset : x \varepsilon N - \iota b . \supset_x . x \varepsilon N . \supset_x . \text{suc}\, x\, \varepsilon N - \iota b$ (4)

Hp $. a \varepsilon - \iota b$. (1) . (4) . P·3 $. \supset . N \supset N - \iota b . \supset . N \supset - \iota b$ (5)

Hp . (5) $. \supset : -(a = b) . \supset . -(b \varepsilon N) : \supset : b \varepsilon N . \supset . a = b$ (6)

Hp $. \supset . b \varepsilon N$. (6) $. \supset .$ Ths]

*
* *

En suite, je définis le symbole « 0 » par la P

$✽$ 4·1 $0 = \bar{\iota}(N - N_1)$; $=$ P1·8 ;

et j'en déduis les P

·2 $N - N_1 = \iota 0$ [P3·2·4 . P·1 . §17P·0 $. \supset .$ P]

·3 $0 \varepsilon N - N_1$ [P·2 . P0·6 $. \supset .$ P]

·31 $0 \varepsilon N$ [P·3 $. \supset .$ P] ; $=$ P1·1 ;

·32 $0 - \varepsilon N_1$ [» »] ; $=$ §11 P2·2 ;

·33 $- \exists N\, y \ni (\text{suc}\, y = 0)$ [P·32 . P3·1 $. \supset .$ P] ; $=$ F1898 P003·6 ;

·34 $a \varepsilon N . \supset . \text{suc}\, a - = 0$ [$=$ P·33] ; $=$ P1·4 ;

(*) Qu'on doit considérer comme un tout indécomposable, bien qu'il soit typographiquement composé.

(**) « Il y a des $N - N_1$ » $=$ « Il y a des N qui ne sont pas des N_1 ».

(***) « Il n'y a pas de $N - N_1$ différents entre eux ».

$\cdot 4 \quad 0 \varepsilon s : x \varepsilon s \,.\supset_x.\, \mathrm{suc}x \,\varepsilon s :\supset.\, \mathrm{N} \supset s \qquad \{ = \mathrm{P}1\cdot5 \} \quad \{ \text{Induct N} \}$(*)
[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, 0 \varepsilon s \,.\, \mathrm{P}0\cdot8 \,.\supset.\, \exists s \frown \iota 0 \,.\, \mathrm{P}\cdot2 \,.\supset.\, \exists s \frown \mathrm{N}-\mathrm{N}_1$ (1)
$\mathrm{Hp} \,.\, (1) \,.\, \mathrm{P}3\cdot3 \,.\supset.\, \mathrm{Ths}$]

Et maintenant, puisque dans la nouvelle théorie ou trouve déjà (P·31 . P2·1 . P2·2 . P·34 . P·4) toutes les Pp de l'ancienne (P1·1-·5) on pourrait en continuer le développement comme dans le F.

*
* *

Pour s'assurer que les symboles arithmétiques employés jusqu'-ici ont la même signification dans les deux théories, après avoir déduit dans la nouvelle théorie (P4·31·34·4) les Pp de l'ancienne (qui ne sont plus considérées comme Pp), il faut voir comment l'on pourrait déduire dans l'ancienne théorie les nouvelles Pp, c'est-à-dire les P2·3·4 (car on y a déjà déduit (P1·7·8) les nouvelles Df (P3·1 . P4·1)).

De la P (2) de la démonstration de la P1·6 on déduit immédiatement la P2·3.

En suite, des P (2) et (9) de la démonstration de la P1·6, moyennant la P0·6 et la P1·7, on déduit la P4·2, d'où par la P0·8

$0 \varepsilon s \,.=.\, \exists s \frown \mathrm{N}-\mathrm{N}_1$

ce qui rend la P1·5 identique à la P3·3, d'où par la P1·7 on déduit la P2·4.

*
* *

Mais, la simplification logique obtenue dans le point de départ de la nouvelle théorie étant évident, ce que précède pourrait justifier le doute que son développement soit plus compliqué que celui de l'ancienne, particulièrement à cause de la démonstration de la P3·4 qui est nécessaire pour tirer des conséquences de la P4·1 (voir la démonstration de la P4·2).

Par suite, il n'est peut être superflu de constater que, moyennant les P déjà énoncées on peut démontrer, plus aisément que dans le F, les P suivantes qu'on pourra insérer entre les

---

(*) Dans le F cette P est appelée « Induct »; je préfère l'appeler « Induct N », tandis que j'appelle « Induct N_1 » la P5·5 et j'appellerais « Induct n » chacune des P34,35,35 de *Numeri interi relativi* (RdM, t.VII, a.1901).

P que je viens d'énoncer, à la place indiquée par leur numéro. En même temps j'ajoute quelques autres propriétés des symboles arithmétiques considérés jusqu'ici.

✻ 2·5 $\exists \mathrm{N}$ [P·3 . P0·32 $.\supset.$ P]

·6 $\mathrm{N} \varepsilon \mathrm{Cls}$ [P·5 . P0·2 $.\supset.$ P]

·7 $a,b \, \varepsilon \mathrm{N} \, .\supset: \mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b \, .=. \, a=b$; = F1899 §20 P3·2 ;

[Hp . P·2 $.\supset: \mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b \, .\supset. \, a=b$ (1)

$a=b \, .\supset. \, \mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b$ (*) (2)

Hp . (1) . (2) $.\supset.$ Ths]

✻ 3·5 $y \varepsilon \mathrm{N} \, .\supset. \, \mathrm{suc}y \, \varepsilon \mathrm{N}_1$

[Hp $.\supset. \exists \mathrm{N} \frown y \ni (\mathrm{suc}y = \mathrm{suc}y) \, . \, (\mathrm{suc}y|x)$ P·1 $.\supset.$ Ths]

·6 $\exists \mathrm{N}_1$ [P·5 . P2·5 $.\supset.$ P]

·7 $\mathrm{N}_1 \varepsilon \, \mathrm{Cls}$ [P·6 . P0·2 $.\supset.$ P]

·8 $\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}$; = §11 P2·1 ;

[$y \varepsilon \mathrm{N} \, . \, \mathrm{suc}y = x$. P2·1 $.\supset. \, x \varepsilon \mathrm{N}$ (1)

$x \varepsilon \mathrm{N}_1$. P·1 . (1) $.\supset_x . \, x \varepsilon \mathrm{N} \, :\supset.$ P]

·9 $\mathrm{suc} \, \varepsilon \, (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}) \, \mathrm{rcp}$

[P2·6 . P3·7 $.\supset. \, \mathrm{N}, \mathrm{N}_1 \, \varepsilon \, \mathrm{Cls}$ (1)

(1) . P·5 . §31 P1·01 $.\supset. \, \mathrm{suc} \, \varepsilon \, (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N})$ (2)

(1) . (2) . P2·2 . §31 P3·0 $.\supset. \, \mathrm{suc} \, \varepsilon \, (\mathrm{N}_1 \mathrm{f} \mathrm{N}) \mathrm{sim}$ (3)

(1) . (3) . P·1 . §31 P3·5 $.\supset.$ P]

✻ 4·5 $z \varepsilon \mathrm{N}\text{-}\mathrm{N}_1 \, .\supset. \, z=0$ [P·2 . P0·6 $.\supset.$ P]

·6 $\mathrm{N} = \iota 0 \cup \mathrm{N}_1$ [P·2 . P3·8 . P0·7 $.\supset.$ P] ; = §16 P2·1 ;

·7 $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}\text{-}\iota 0$ [» »] ; = §16 P2·2 ;

·8 $a \varepsilon \mathrm{N} \, .\supset. \, \mathrm{suc}a \, -\!= a$

[$s = \mathrm{N} \frown y \ni (\mathrm{suc}y \, -\!= y) \, .\supset:$ (1)-(4)

P·31·34 $.\supset. \, 0 \varepsilon s$ (1)

$x \varepsilon s \, .\supset_x . \, \mathrm{suc}x \, -\!= x$. P2·1·2 $.\supset_x . \, \mathrm{suc}(\mathrm{suc}x) -\!= \mathrm{suc}x$ (2)

$x \varepsilon s$. P2·1 . (2) $.\supset_x . \, \mathrm{suc}x \, \varepsilon s$ (3)

(1) . (3) . InductN $.\supset. \, \mathrm{N} \supset s$ (4)

(4) $.\supset. \, \mathrm{N} \supset y \ni (\mathrm{suc}y \, -\!= y) \, .\supset.$ P]

(*) La P (2) n'est que la F1899 §20 P3·1; dans la dèmonstration qu'on y donne on cite seulement des P de logique; en effet elle n'esprime qu'une propriété du symbole « = » et ne dépend aucunement de la signification du symbole « suc » (Voir le §3 de l'Avant-propos de mon *Essai d'une théorie algébrique* etc., Bibl. du Congrès Intern. de Philosophie, t.III, p.313, Armand Colin, Paris, 1900).

Note sur les nombres entiers positifs.

Définissons le symbole « 1 », comme dans le F, par la P

✻ 5·0 $1 = \mathrm{suc}0$ Df ; $= \S10$ P2 ;

et démontrons que toutes les Pp du F (P1·1-·5) sont vérifiées si l'on y remplace 0 et N par 1 et N_1 .

·1 $1 \varepsilon N_1$ [P4·31 . P3·5 . P·0 $.\supset.$ P]

·2 $a \varepsilon N_1 .\supset. \mathrm{suc}a\, \varepsilon N_1$ [Hp . P3·8·5 $.\supset.$ Ths]

·3 $a,b \varepsilon N_1 . \mathrm{suc}a = \mathrm{suc}b .\supset. a=b$ [P3·8 . P1·3 $.\supset.$ P]

·4 $a \varepsilon N_1 .\supset. \mathrm{suc}a \,\text{-}\!= 1$

[Hp . P3·8 . P4·31·32 $.\supset. a,0 \varepsilon N . a \text{-}\!= 0$. P1·3 . P·0 $.\supset.$ Ths]

·5 $1 \varepsilon s : x \varepsilon s .\supset_x. \mathrm{suc}x \varepsilon s :\supset. N_1 \supset s$; Induct N_1 ; (*)

| $u = \iota 0 \cup s .\supset.\because$ (1)-(5)

$\iota 0 \supset u$. §16 P1·2 $.\supset.\because 0 \varepsilon u$ (1)

§16 P1·1 $.\supset: x \varepsilon u .\supset_x . x=0 .\cup. x \varepsilon s$ (2)

Hp . P·0 $.\supset: x=0 .\supset_x . \mathrm{suc}x\, \varepsilon s$ (3)

Hp . (2) . (3) $.\supset: x \varepsilon u .\supset_x . \mathrm{suc}x\, \varepsilon s .\supset_x . \mathrm{suc}x\, \varepsilon u$ (4)

Hp . (1) . (4) . Induct N $.\supset. N \supset u$ (5)

Hp . (5) $.\supset. N \supset \iota 0 \cup s .\supset. N \text{-} \iota 0 \supset s$. P4·7 $.\supset.$ Ths]

Par suite, ceux qui veulent développer seulement la théorie des nombres entiers positifs (0 exclus), peuvent adopter comme Pp lesP5·1-·5, qui sont absolument indépendantes entre elles, ainsi que les Pp du F (P1·1-·5) dont elles diffèrent par une simple substitution de symboles.

Mais alors le système de symboles primitifs

1 N_1 suc

n'est pas irréductible par rapport au système des Pp, car de ce système on déduit la (1, N_1 | 0, N) P1·6 qui permet de définir le symbole « 1 ».

Par suite, on pourrait répéter tout ce qui précède, en y remplaçant 0 par 1, N par N_1, N_1 par N_2 (**), 1 par 2; et ceux qui voudraient s'occuper exclusivement des N_1 n'auront qu'à transcrire la Nouvelle théorie en y faisant la substitution indiquée.

(*) Voir la note à la P4·4.

(**) N = « nombre entier à commencer par 0 »

N_1 = « » » » 1 »

N_2 = « » » » 2 ».

En d'autres termes: pour développer immédiatement la théorie des N_1 on adoptera comme primitifs les symboles

N_1 suc

et comme Pp les $(N_1 \mid N)P2{\cdot}1\text{-}{\cdot}4$.

Mais ceux qui voudraient suivre cette méthode pour s'occuper d'abord des N_1 et définir plus tard le symbole « 0 » (selon l'usage commun), trouveraient des difficultés (F1902, p.32, *Notes* 1.5-6) que je vais préciser.

La Df de « 0 » serait

α) $0 = \bar{\iota}\, x \ni (\mathrm{suc}\,x = 1)$

après quoi, la Df de « N » serait la P4·6 $N = \iota 0 \cup N_1$.

Mais, pour pouvoir tirer des conséquences de la P (*α*), il faut savoir d'abord (§17 P·0) que

β) $\exists\, x \ni (\mathrm{suc}\,x = 1)$

γ) $y, z \,\varepsilon\, [x \ni (\mathrm{suc}\,x = 1)] \;.\supset_{y,z}.\; y = z$

Or, puisque les P(*β*) (*γ*) sont indépendantes entre elles et des Pp $(N_1 \mid N)2{\cdot}1\text{-}{\cdot}4$ (*), il faudrait les considérer comme des nouvelles Pp; et l'on viendrait ainsi à porter inutilement de 4 à 6 le nombre total des Pp de la théorie des N.

(*) En effet, si l'on décide de n'employer la notation « suc$x$ » que si « $x \varepsilon N_1$ » les $(N_1|N)$ P2·1-·4 sont encore vérifiées et la P(*γ*) aussi (car son Hp ne peut pas être vérifiée), tandis que la P(*β*) ne l'est pas; et si,

$$y, z \,\text{-}\varepsilon\, N_1 \,.\, y \,\text{-}\!= z \,.\, \mathrm{suc}\,y = 1 \,.\, \mathrm{suc}\,z = 1,$$

les $(N_1|N)$P2·1-·4 sont encore vérifiées et la P(*β*) aussi, tandis que la P(*γ*) ne l'est pas. (Les $(N_1|N)$P2·1-·4 ne bornent la liberté d'interprétation de la notation « suc$x$ » que si « $x \varepsilon N_1$ »; par suite l'interpretation que nous venons de considérer n'est pas en contradiction avec la $(N_1|N)$ P2·2).

Notizie Biografiche su ERNST SCHROEDER

per il Prof. Dr. Haussner

(Trad. di G. Vacca)

Dr. Phil. Ernst Schröder, consigliere di corte del gran ducato di Baden, prof. ordinario di matematica all'Istituto Tecnico Superiore di Karlsruhe in Baden.

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, nato il 25 novembre 1841 in Mannheim, discende da una famiglia di dotti.

Studiò nel Liceo (Ginnasio) di Mannheim e poi all'Università di Heidelberg, dove nel 1862, dopo di aver studiato per due anni presso Hesse, Kirchhoff e Bunsen fu promosso colla nota *summa cum laude*. Subito dopo Schröder si recò all'Università di Königsberg dove oltre a seguitare le lezioni fisico-matematiche, prese parte agli esercizi di Seminario per queste discipline. Nell'autunno del 1864 terminò i suoi studi coll'esame per l'abilitazione all'insegnamento in Baden. Subito dopo però domandò un permesso per divenire docente privato in matematica al Politecnico federale in Zurigo.

Dall'autunno del 1864 fino a Pasqua del 1868 insegnò in pari tempo come supplente alla Scuola Cantonale di Zurigo dove diede lezioni di algebra, trigonometria, geometria e meccanica. In seguito ritornò al servizio dello Stato di Baden insegnando come supplente alla *Höheren Bürger Schule* in Karlsruhe e poi come titolare al *Paedagogium* di Pforzheim.

Nell'ottobre del 1869 diede il secondo così detto esame di servizio *(Dienstprüfung)*. Nel 1870, nominato professore del Gran Ducato di Baden, occupò subito dopo una cattedra per la matematica e scienze naturali al *Pro-* e *real gymnasium* di Baden-Baden e nel 1874 fu chiamato come professore ordinario di matematica all'Istituto Tecnico Superiore di Karlsruhe, dove insegnò aritmetica, trigonometria ed analisi superiore.

Fra i lavori di Schröder devono ricordarsi una quantità di memorie comparse in diverse riviste tecniche e programmi, su alcune questioni relative al suo insegnamento, come:

MacLaurin'sche Summenformel.
Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.
Iterirte Functionen.
Vier Combinatorische Probleme.
V. Staudts Rechnung mit Würfen.
Trinomische Gleichungen.
Theorem der Funktionslehre, ecc.

A questi si aggiungono le note e studi sull'aritmetica e l'algebra, le quali iniziano le ricerche del secondo gruppo dei suoi studi. Esse stabiliscono per queste discipline una base più larga riannodandole all'*algebra assoluta*, ossia ad una teoria generale delle relazioni la quale prescinde anche dalla legge associativa.

Dei lavori come questi che rappresentano il primo campo di ricerche di Schröder, è stato pubblicato ancora poco. Citiamo

fra gli altri *Die formalen Elemente der absoluten Algebra*, una memoria *Ueber Algorithmen und Kalkuln*, come pure qualche lavoro nei Reports of the British Association.

Il terzo gruppo dei lavori del prof. Schröder comprende gli studi relativi ad una riforma ed allo sviluppo della logica. In questo campo egli seguitò le ricerche di numerosi predecessori e contemporanei, come Leibniz, Plancquet, Boole, De Morgan, Charles Peirce ed altri. I lavori fatti in questo senso cercano di condurre la logica ad un algoritmo calcolatore e in special modo di rendere accessibili i concetti relativi ad una trattazione esatta, ed emancipandosi dalle pastoie abitudinarie della parola anche nel campo della filosofia, di togliere alla frase « ogni efficacia (nährboden) ». Avrebbe dovuto perciò essere costrutta una lingua scientifica universale completamente diversa dai tentativi linguistici alla *Volapük* e rappresentata più come lingua dei segni che dei suoni. Un piccolo lavoro intorno a questo tema risale al 1877: *Der Operations Kreis der Logikkalkuls*. Un'opera più complessa è in corso di pubblicazione dal 1890: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, di cui il primo volume tratta il calcolo delle classi, il secondo il calcolo delle proposizioni ed il terzo l'*algebra dei relativi*. Pensieri analoghi si trovano anche in alcuni articoli, come nel suo discorso (Rektoratsrede): « Ueber das Zeichen » così pure nel *Monist* col titolo *On pasigraphy* e nella *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie 1900*, sotto il titolo *Sur une extension de l'idée d'ordre*. Come appare dalle date sopra ricordate, Schröder appartiene alla schiera di quei pochi docenti di matematica degli istituti superiori che, come già Weierstrass, e Paul du Bois Raymond, hanno percorso tutti i gradi. La tendenza a schematizzare e lo sforzo di appoggiare la pratica alla teoria spinsero Schröder a far avanzare la fisica mediante il perfezionamento della matematica. A ciò servì l'approfondimento della meccanica e della geometria e sopratutto della aritmetica, ed in relazione a ciò gli si presentò gradatamente la necessità di riformare anzitutto le fonti di tutte queste discipline.

Il 16 giugno del corrente anno Schröder morì in seguito ad un colpo cagionato da una infiammazione di cervello.

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES

(RIVISTA DI MATEMATICA)

PUBLIÉE PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin

TOME VIII - N. 3

SOMMAIRE

G. VAILATI. *Aggiunte alle note storiche del « Formulario »* . . . . p. 57
G. VACCA. *La logica di Leibniz* . . . . » 64
G. PEANO. *De latino sine flexione* . . . . » 74
G. PEANO. *Principio de permanentia* . . . . » 84
G. VACCA. *Sphaera es solo corpore, qui nos pote vide ut circulo ab omne puncto externo.* . . . . » 87

TURIN
BOCCA FRÈRES
LIBRAIRES
1903

LIBRI RICEVUTI

(a disposizione dei collaboratori italiani che intendono farne il confronto col Formulario, o la recensione).

CH. MÉRAY. *Nouveaux éléments de Géométrie,* Dijon, a. 1903, p. VIII+450.

C. M. JESSOP. *A treatise on the line complex,* Cambridge, a. 1903, p. 364.

F. MÜLLER. *Planimetria ad uso delle scuole medie,* Torino, Paravia, a. 1903, p. 170 — L. 2,40.

E. SADUN e C. SOSCHINO. *Lezioni di Aritmetica,* Torino, Paravia, a. 1902, p. 176 — L. 2,25.

C. J. JOLY. *Elements of quaternions by the late sir W. R. Hamilton,* ed- in-4°, London, a. 1902, t. 2, p. 1085.

Andrew Russell FORSYTH. *A treatise on differential equations,* 3 ed. London a. 1903, p. VIII+511.

Bertrand RUSSELL, *The principles of mathematics,* Vol. 1, Cambridge a. 1903, p. XXIX+534.

G. A. MAGGI. *Principii di stereodinamica,* Milano, Hoepli, anno 1903, p. XI+263 — L. 7,50.

K. ZINDLER. *Liniengeometrie,* Band 1, Leipzig, Sammlung Schubert XXXIV, p. 380 — Mk. 12.

A. BINDONI. *Aritmetica generale,* Treviso, a. 1903, p. 35.

J. RICHARD. *Sur la philosophie des mathématiques,* Paris, a. 1903, p. 248.

E. MACH. *Populär-wissenschaftiche Vorlesungen,* Leipzig, a. 1903, p. XI+403.

Niels Henrick Abel, memorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance, Kristiania, a. 1902, édition de luxe, p. 119+135+61+64+59.

A. LANNER. *Naturlehre,* Wien, a. 1902, p. 377.

W. W. Rouse BALL. *Storia delle Matematiche,* versione di D. Gambioli e G. Puliti, Bologna, a. 1903 — L. 8.

P. GAZZANIGA. *Gli elementi della teoria dei numeri,* Padova, a. 1903, p. 408 — L. 8.

AGGIUNTE ALLE NOTE STORICHE DEL " FORMULARIO „

§ Def.

Delle due principali specie di definizioni, adoperate nel « Formulario », cioè da una parte le definizioni, di classi o di individui, non precedute da alcuna ipotesi, e dall'altra parte le definizioni di funzioni o relazioni, sussistenti tra individui di date classi (definizioni che devono quindi essere precedute dall'ipotesi che gli individui rappresentati dalle lettere che vi figurano appartengono alle classi di cui si tratta), le prime soltanto sono state prese in considerazione dalla logica ordinaria.

Le seconde, invece, sebbene delle loro varie forme, compresa quella delle « definizioni per astrazione », si riscontrino già esempi nei geometri greci (cnfr. per esempio la definizione data da Euclide della relazione di proporzionalità fra quattro grandezze) non sembrano aver formato mai oggetto di considerazione teorica indipendente in alcuna trattazione della logica anteriore ai recenti sviluppi della logica matematica. Solo qualche vaga e indiretta allusione ad essi si trova nella Topica d'Aristotele (Lib. 1, cap. 4°) dove egli osserva come, non solo le parole isolate, ma anche le frasi intere siano suscettibili di essere definite. (*δυνατὸν γὰρ καὶ τῶν ὑπὸ λόγου τινὰ σημαινομένων ὁρίσασθαι.*)

*
* *

La frase più frequentemente usata da Aristotele per caratterizzare la definizione della prima specie sopra accennata, cioè le definizioni di classi (senza ipotesi), consiste nel dire che esse « *σημαίνουσιν τὸ τί ἦν εἶναι* » frase tecnica della quale non è facile trovare la corrispondente nel linguaggio filosofico moderno, e che gli scolastici traducevano, altrettanto letteralmente quanto barbaramente, in latino con l'altra: « *significant quod quid erat esse* ». Colle notazioni del Formulario il significato di tale frase si può rendere esattamente dicendo che, se A è il simbolo della classe che si tratta di definire, la definizione consiste nel dichia-

rare il senso che si intende attribuire alla proposizione $x \varepsilon A$, o, in altre parole, che la definizione si effettua scrivendo un'uguaglianza nella quale figuri come primo membro la proposizione $x \varepsilon A$ e come secondo membro una proposizione di noto significato.

Che questo sia il preciso senso attribuito da Aristotele alla suddetta locuzione e all'altra, pure promiscuamente adoperata, colla quale egli afferma che le definizioni indicano l'*essenza* (τὴν οὐσίαν σημαίνουσιν) della cosa definita, risulta chiaramente, tra gli altri, dal passo (Categorie c. I) in cui parlando, della definizione di *ζῶον*, la fa consistere nell'indicare che cosa si asserisca d'una cosa o d'un'altra col dirla uno *ζῶον*. (τί ἐστι ἑκατέρῳ αὐτῶν τὸ ζώῳ εἶναι).

* * *

Alla distinzione tra le definizioni e le altre specie di proposizioni che figurano in una data trattazione, è dato da Aristotele il massimo rilievo.

Essa sta a base della nota classificazione delle varie specie di « predicabili », (κατηγορούμενα), classificazione nella quale le proposizioni sono distinte in quattro classi (τέτταρες διαφοραί. Topica I, 7) a seconda che le proprietà, che in esse sono attribuite al soggetto dai rispettivi predicati, sono:

1) o l'insieme delle proprietà che costituiscono la definizione del soggetto (ὅρος);

2) o una parte di tale insieme di proprietà (γένος);

3) o delle proprietà che, pur senza far parte di quelle che figurano nella definizione del soggetto, sono tuttavia possedute *da tutti* gli individui della classe che esso indica, e *solo da essi* (ἴδιον);

4) o delle proprietà che non si trovano in alcuno dei tre casi precedentemente considerati (συμβεβηκός).

Nel primo caso si hanno le definizioni propriamente dette, nel secondo le proposizioni che, pur non essendo definizioni, sono *vere per definizione* (sempre s' intende in una determinata trattazione), nel terzo le proposizioni che, pur non essendo definizioni, si possono mettere sotto forma di eguaglianze (Defp), e nel quarto tutte le altre proposizioni.

Il significato fondamentale della suddetta classificazione aristotelica, così chiaro nell'esposizione generale conservataci nella Topica, si trova in gran parte offuscato e falsato nell'elaborazione alla quale essa fu assoggettata da Porfirio in quella sua Introduzione (εἰσαγογή) agli scritti logici d'Aristotele che fu il principale tramite attraverso al quale la dottrina aristotelica esercitò la sua prima influenza sulla cultura occidentale (Boezio).

È nell'Isagoge di Porfirio che la classificazione sopra indicata viene a trasformarsi nell'altra cosidetta delle « cinque voci » : *genus, species, differentia, proprium, accidens,* adottata in seguito dalla tradizione scolastica, e nella quale va smarrita quasi ogni traccia della precisione e simmetria originale.

È pure a Porfirio, se non anche a qualche più antico commentatore, che andiamo debitori dell'enunciazione della nota regola che « ogni definizione debba procedere *per genus et differentiam* », regola la quale, oltrecchè priva di valore intrinseco, non poteva trovare alcun appoggio nell'autorità d'Aristotele il quale parla anzi più d'una volta delle varie *differentiae* (διαφοραί) che possono figurare in una stessa definizione.

*
* *

Anche la distinzione fra definizioni reali e nominali deve la sua origine ad elaborazioni posteriori della dottrina aristotelica.

In quei capitoli tuttavia dell'*Analytica Posterior* (IX, X) nei quali Aristotele prende ad esaminare l'ufficio delle definizioni in una scienza dimostrativa (ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη) si trovano alcune notevoli osservazioni riferentisi alla questione che doveva in seguito dar luogo all'introduzione della distinzione suddetta.

Aristotele insiste ivi sulla necessità di ben distinguere le definizioni propriamente dette da quelle proposizioni nelle quali, insieme alla definizione, è implicata anche l'asserzione dell'esistenza di ciò che si definisce.

Tali asserzioni di esistenza sono da lui qualificate o come delle *ipotesi* o come delle *proposizioni da dimostrare,* a seconda che si riferiscano ai concetti fondamentali (τὰ πρῶτα) della scienza di cui si tratta, o ai concetti « derivati », definibili mediante i primi.

Gli esempi in proposito sono da lui desunti dall'aritmetica e dalla geometria. (Analytica posterior lib. I cap. 10).

Le considerazioni ivi svolte da Aristotele trovano il loro perfetto riscontro nelle seguenti di Leibniz (*De organo sive arte magna cogitandi*. V. Opuscules et fragments inédits publiés par L. Couturat 1903):

... sufficiet nobis ingentem (rerum) multitudinem revocare ad paucas quasdam, *quarum possibilitas vel supponi ac postulari, vel experimento probari potest.*

Ita omnes lineae motuum in geometria revocantur ad duo tantum motus, unum in linea recta alterum in linea circulari. His duobus enim suppositis, *demonstrari potest omnes alias lineas* (e. c. Parabolam, Hyperbolam, Conchoidem, Spiralem) *possibiles esse*. Rectam autem duci et circulum describi, Euclides non docuit sed *postulare* satis habuit. (Op. cit. Couturat p. 431).

Il nesso che sussiste tra le suddette considerazioni e le distinzioni tra definizioni nominali e definizioni reali, nel senso in cui questa è intesa da Leibniz, risulterà chiaro dai seguenti altri passi (che riporto dalla stessa pubblicazione del Conturat):

« *Definitio realis seu definitio talis ex quo statim patet rem de qua agitur esse possibilem* (p. 220). [Definitiones] non sunt veritates, sed explicationes terminorum *nisi quatenus de possibilitate agitur, nam eatenus ad axiomata vel postulata referri debent* (p. 538).

Ciò che intende qui Leibniz per *possibilitas* è da lui ulteriormente spiegato:

Possibiles sunt termini *de quibus demonstrari potest nunquam in resolutionem occursuram contradictionem*. (Ib. p. 371).

Le definizioni che non soddisfino a questa condizione sono quelle che egli chiama « definizioni nominali » (definitiones pure nominales).

Sull' importanza di non scambiare queste per definizioni reali, nel senso sopra definito, egli si esprime nei seguenti termini:

« Si definitionem aliquam demus nec ex ea appareat *ideam*, quam rei adscribimus, *esse possibilem*, non possumus demonstrationibus fidere quas ex definitioue duximus, quia si idea illa forte contradictionem involvit, fieri potest ut contradictoria

etiam de ea simul vera sint, adeoque demonstrationes nostrae erunt inutiles. Unde patet definitiones non esse arbitrarias. Atque hoc est arcanum vix cuique satis animadversum ». (Ib. pag. 331).

L'interesse che per Leibniz presentava la distinzione così stabilita, si connette al fatto che egli vedeva in essa l'unica via per sottrarsi a quell'obbiezione, alla quale egli spesso allude sotto il nome di « difficultas Hobbesiana circa definitiones arbitrarias ». (V. Ib. pag. 220, 516, ecc.), e che consisteva nell'asserire che, essendo le definizioni proposizioni esprimenti semplici convenzioni arbitrarie, tali dovessero ritenersi anche tutte le conclusioni che, per loro mezzo, si ottenevano nelle scienze dimostrative. (Hobbes, Computatio sive Logica, Pars I, cap. 5°.

***

Quanto ai mezzi per distinguere se una data definizione sia «reale» o puramente «nominale» è importante notare come Leibniz ammetta esservi casi nei quali la questione non può essere risolta se non coll'addurre degli *esempi*, nei quali le proprietà considerate dalla definizione, si trovino effettivamente riunite.

« [Si A = E.F.G] necesse est ut demonstretur A esse possibilem, seu E.F.G non involvere contradictionem, idest non involvi X non X. Quod cognosci non potest nisi experimento, si constat A existere vel extitisse, adeoque esse possibilem, aut saltem extitisse aliquid ipsi A simile ». (Ibid. pag. 372).

È sotto questa forma che compare, per la prima volta nella storia della logica, la questione relativa alla « compatibilità » del sistema di Pp che si assuma a base d'una data trattazione:

« Si dico A = E.F.G, non tantum scire debeo E, F, G singula esse possibilia, sed etiam inter se compatibilia; id autem patet non fieri posse nisi experimento vel rei vel alterius rei similis in eo saltem de quo agitur ». (Ib. pag. 374).

Idee analoghe a queste erano, quasi contemporaneamente espresse, da Gerolamo Saccheri (1), nell'opuscolo portante il titolo

(1) Di tale opuscolo del Saccheri (n. a S. Romo 1667, m. a Milano 1733), si trova una copia alla Biblioteca di Brera (Milano) con sola indicazione manoscritta del nome del vero autore, di cui non è fatta menzione nè sul frontispizio nè altrove.

Logica demonstrativa, pubblicato a Torino nel 1697, rimasto sino al presente non meno ignorato dei manoscritti di Leibniz contenenti i brani sopra riportati.

Il capitolo della Logica del Saccheri che si riferisce alla questione di cui parliamo, è quello che figura in fine dell'opera e nel quale vengono esaminate alcune specie di sofismi, non considerati dalla Logica tradizionale. (Huc usque de fallaciis communiter observatis. Duas adhuc superaddemus nec eas ut opinor parvi momenti. Hanc « fallaciam complexi » appello, illam « duplicis definitionis» seu « hypothesis ». (Log. dem. p. 256).

Le forme di ragionamento illusorie esaminate dal Saccheri sotto il nome di « fallaciae duplicis hypothesis » sono appunto quelle che consistono nel credere di poter dedurre conseguenze attendibili da sistemi d'ipotesi tra loro incompatibili (tali cioè che fra esse ne esista alcuna la cui negazione possa essere dedotta dalle rimanenti); ed egli ne passa in rassegna vari casi, a cominciare dal più semplice (cioè quello di un sillogismo lo cui premesse si contraddicano direttamente, fino ai casi più complicati nei quali la contraddizione può essere rivelata soltanto dallo sviluppo successivo delle conseguenze del sistema di ipotesi, o postulati, assunto a base dell'intera trattazione.

Queste considerazioni insieme alle altre d'indole analoga relative agli errori di ragionamento che possono derivare dall'adozione di definizioni « sovrabbondanti » (*fallacia definitionis complexae*) sembrano aver avuto gran parte nel guidare il Saccheri a quelle ricerche sui principii della geometria, i cui risultati furono da lui pubblicati quarant'anni più tardi, cioè l'anno stesso della sua morte, nell'opera « Euclides ab omni naevo vindicatus » (Mediolani 1733). Ivi ritorna ripetutamente sullo stesso argomento asserendo che, dal trascurare le ricerche relative

Nella lista delle opere del Saccheri data da P. Stäckel (Theorie der Parallellinien, Teubner 1903) ne è indicata erroneamente la data di pubblicazione. Lo Stäckel fa pure cenno di altre due edizioni, l'una pubblicata a Pavia (1701) e l'altra a Colonia (Augustae Ubiorum 1735) avvertendo di non averne potuto consultare alcuna.

Della seconda esiste una copia alla Biblioteca dell'Università di Pavia, e della terza, particolarmente interessante per una prefazione contenente curiosi particolari biografici e un giudizio del Leibniz sulle opere geometriche del Saccheri, trovai due copie l'una alla Biblioteca di Colonia (Gereon's Kloster) e un'altra alla Biblioteca Universitaria di Lovanio.

alla compatibilità dalle ipotesi che si assumano, consciamente o no, a base d'una teoria deduttiva « irritus est omnis progressus ad adsequendam veritatem absolute talem ». (Euclides vindicatus pag. 100).

*
* *

Delle trattazioni moderne della logica, anteriore ai recenti sviluppi della logica matematica, quella nella quale sulla questione delle definizioni nominali e reali sono sostenute idee maggiormente conformi a quelle adottate nel Formulario è il « System of Logic dello Stuart Mill » (1838).

In essa quelle che il Leibniz chiama « definitiones reales » sono chiaramente riconosciute non essere definizioni affatto, ma proposizioni sulle quali, a causa d'un imperfezione del linguaggio ordinario, si trovano riunite due asserzioni diverse, l'una delle quali soltanto è una definizione mentre l'altra è un'asserzione relativa all'esistenza di ciò che la prima definisce:

« The distinction between *nominal* and *real definitions*, between *definitions of words* and what are called, *definitions of things*, though conformable to the ideas of most of the Aristotelian logicians, cannot, as it appears to us be maintained. — All definitions are of names and names only; but in some definitions it is clearly apparent that nothing is intended except to explain the meaning of the word, while in others it is intended to be implied that there esists a thing corresponding to the word. Whether this be or be not implied in any given case cannot be collected from the form of the espression. — There are therefore expressions commonly passing for definitions which include in themselves more than the mere explanation of the meaning of a term. But it is not correct to call an expression of this sort a peculiar kind of definition.

Its difference from the other kind consists in this that it is not a definition but a definition and something more. — There is a real distinction then betwen definitions of name and what are erroneusly called definitions of things: but it is that the latter along with the meaning of the name *covertly* asserts a matter of fact. This *covert* assertion is not a definition but a postulate. (Syst. of Log. B. I, ch. VIII, § 5).

G. Vailati.

LA LOGICA DI LEIBNIZ

I.

Alla storia della logica matematica mi sembra applicabile il seguente criterio di J. B. Say [1]:

« L'histoire d'une science ne ressemble point à une narration d'événements. Elle ne peut être que l'exposé des tentatives plus ou moins heureuses, qu'on a fait à diverses reprises et dans plusieurs endroits différents, pour recueillir et solidement établir les vérités dont elle se compose.

« Que pourrions-nous gagner à recueillir des opinions absurdes, des doctrines décriées et qui méritent de l'être? Il serait à la fois inutile et fastidieux de les exhumer. Aussi l'histoire d'une science devient-elle de plus en plus courte à mesure que la science se perfectionne; car, suivant une observation très juste de D'Alembert « plus on acquiert des lumières sur un sujet moins on s'occupe des opinions fausses ou douteuses qu'il a produites ». On ne cherche pas à savoir ce qu'ont pensé les hommes, que faute d'idées fixes et lumineuses auxquelles on puisse s'arrêter..... Les erreurs ne sont pas ce qu'il s'agit d'apprendre, ma ce qu'il faudrait oublier »,

Ed è partendo da questo punto di vista che io intendo analizzare qui gli *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, extraits des Mss. de la Biblioth. roy. de Hanovre, par LOUIS COUTURAT, Paris, Alcan, 1903.

Mi limito quindi a ricercare nei Mss. di Leibniz quali siano le parti che oggi più interessano la logica matematica nel suo attuale stato.

Le citazioni, quando non risulti altrimenti, si riferiscono a questo libro.

---

[1] J. B. SAY, Hist. abrégée de l'écon. polit. Cours compl. P. II, p. 540. ed. Guillaumin, a. 1840 — citato da Pantaleoni, Giornale degli Economisti. a. 1898, t. 17, s. 2, p. 407.

II.

L'erudizione di Leibniz era prodigiosa. È quindi difficile scoprire a quali fonti egli abbia attinto. È certo però che se si possono trovare nei suoi predecessori molti tentativi di costituire un'arte di ragionare completamente in simboli, questi rimasero sempre vani sogni.

Ciò non esclude che i tentativi di molti ricercatori tra Aristotele e Leibniz siano privi di interesse.

Sarebbe anzi desiderabile, ed io spero, che il Dr Gregorio Itelson vorrà presto pubblicare le notizie storiche che egli comunicò in parte al Congresso di scienze storiche di Roma nell'aprile del 1903, relative a Joh. Weigel, Chr. Sturm, J. C. Lange, Pierre du Moulin ed altri, e dalle quali sembra risultare che prima di Leibniz era già nota la suggestiva rappresentazione delle figure sillogistiche per mezzo dei cerchi attribuiti ad Eulero, e che già si era osservata la *transitività* di altre relazioni, oltre quelle indicate dai simboli $\supset$, $>$, $=$, come ad es. l'*essere legato insieme con*, ecc.

Pure ciò non toglie che Leibniz abbia visto per il primo in modo chiaro l'esistenza di una logica matematica ed abbia cercato di costruirla.

« Sentio, egli diceva, Logicam quae habetur in scholis tantum abesse a Logica illa utili in dirigenda mente circa veritatum variarum inquisitionem, quantum differt Arithmetica puerilis ab Algebra praestantis mathematici » (pag. 419).

Tuttavia non pubblicò nessun saggio dei risultati che aveva ottenuto.

I suoi successori, sopratutto Lambert nel secolo XVIII, poi Boole e De Morgan, infine Mc Coll, Peirce e Schröder sapevano che Leibniz era giunto a costruire un algoritmo logico fondato sulle proprietà dei segni $\supset$, $\cap$, $\cup$, $-$, $=$, $\wedge$. Essi riuscirono a ricostituirlo e precisarlo senza aggiungervi però nulla di notevole, come risulta dal F1902, nel quale sono adoperate 28 P attribuite a L.; ed appena una o due a ciascuno degli autori sopra citati.

Ed è importante osservare che il primo di questi autori, il Lambert, conobbe assai probabilmente i Mss. inediti di Leibniz (conf. *Acta Erud.* a. 1765, p. 541)

Quindi, malgrado che la pubblicazione dei Mss. inediti di L. sia avvenuta soltanto dopo due secoli che furono scritti, essi hanno una effettiva importanza nella storia della logica.

E questa è resa maggiore dal fatto che in Leibniz solo, ad esclusione dei suoi successori, si trovano alcuni tentativi per spingersi più innanzi nel simbolismo.

Infatti L. fece ripetuti sforzi per fissare le regole a cui devono soddisfare le Df, per scrivere proposisioni contenenti lettere variabili, ecc.

Questi sforzi però passarono inavvertiti.

Soltanto nel 1879 il Frege nella sua *Begriffschrift* riuscì a scrivere parzialmente in simboli qualche proposizione contenente lettere variabili, ma si arrestò subito a causa sopratutto della notazione poco felice.

Finalmente nel Formulario si riuscì all'analisi completa delle idee di Logica, e quindi ad esprimere dapprima poche proposizioni di matematica, poi teorie complete.

III.

Ecco alcuni passi relativi alla teoria delle Definizioni:

« DEFINITIO (DEFINITUM seu NOMEN) est terminus magis compositus (simplex) propositionis reciprocae pro arbitrio assumptae, ex termino simplici et composito constantis. Itaque definitio est propositio CUIUS RATIO NON REDDITUR, SED QUAM COMPENDII TANTUM CAUSA ADHIBEMUS. Est ergo definitio hypothesis quaedam, de cuius veritate disputari non debet, sed tantum an sit apta, clara, prudenter assumta » (p. 242).

Leibniz dice qui, d'accordo col F, (§ Df p. 11) che ogni Df è una eguaglianza (propositio reciproca), che esprime la convenzione di scrivere un segno semplice in luogo di un gruppo di segni.

Quindi per L. come per il F. le definizioni non si dimostrano. Non tutti gli autori moderni hanno idee ben chiare a questo riguardo, credendosi essi spesso in obbligo di dimostrare la validità delle definizioni date.

Leibniz continua poi a parlare delle definizioni possibili (Dfp del F):

(p. 258) « Eiusdem definiti multae possunt esse definitiones.

« ... Omnis proprietas reciproca potest esse definitio.

« Si una ex definitionibus eligatur, ceterae ex ea demonstrabuntur ut proprietates. Unaquaeque proprietas reciproca totam subjecti naturam exhaurit, seu ex unaquaque proprietate reciproca duci possunt omnia ».

Egli porta l'esempio: 24 aequ. 6,4 - 24 aeq. 8,3 - 24 aequ. 12,2, et denique 24 aequ. 2,3,4.

Anche nel F si chiamano Dfp tutte le eguaglianze che possono essere prese come Df di un dato segno.

Quando si sia scelta una di esse, le altre sono teoremi che si dimostrano.

Anche questa idea non è universalmente accettata dai matematici odierni. Così vi sono alcuni autori che cercano o credono di aver trovato LA *definizione* della retta, del piano, ecc., mentre tutto al più essi possono aver trovata *una* delle tante definizioni possibili di questi enti.

Essi credono che si possa parlare della definizione di un ente senza aver prima detto quali idee e quali proposizioni si ammettano come già note, mentre l'assunzione a definizione di una eguaglianza non dipende soltanto dalla eguaglianza stessa, ma dal posto che essa occupa in una data teoria.

Leibniz trova poi che ogni segno rigorosamente definito può essere soppresso sostituendolo col suo *valore*.

« Si formula quaedam aequivaleat characteri, ita ut sibi mutuo substitui possint, ea formula dicetur VALOR characteris. Valor primigenius characteris, qui scilicet pro arbitrio ei assignatur nec probatione opus habet, est eius SIGNIFICATIO » *(Fundamenta calculi ratiocinatoris)* (p. 284).

« RESOLUTIO est substitutio definitionis in locum definiti, COMPOSITIO est substitutio definiti in locum definitionis » (p. 258).

Conviene dire che queste idee di Leibniz sono assai probabilmente il frutto della lettura del Saggio di Pascal (opera postuma anch'essa) sull'Esprit géométrique.

L. continuò poi a cercare delle condizioni che rendessero più perfette le Df, senza però riuscirvi.

Ecco alcuni suoi tentativi i quali serviranno a farci vedere se e fino a che punto vi sia oggi ancora una difficoltà da superare. Opusc. p. 258:

« Definitio eo perfectior est, quo minus resolubiles sunt termini qui in eam ingrediuntur.

« Definitio satis perfecta est, si ea simul explcata dubitari non potest an definitum sit possibile ».

La prima di queste due regole non è sempre opportuna: infatti p. es. è preferibile la Df: $3 = 2 +$ all'altra: $3 = 0 + + +$. Nel F si ammette piuttosto la regola opposta, proposta presso a poco dal Padoa; che cioè ogni simbolo già definito deve sempre adoperarsi ogni qualvolta ciò è possibile; in particolare quindi in tutte le Df che lo seguono, ed in cui può facilmente comparire.

Tuttavia nel desiderato di Leibniz vi è qualche cosa che soddisfa, come risulta ad esempio dalle Df:

$a, b \,\varepsilon\, N_1 . \supset .$

$m(a, b) = \min (N_1 a \cap N_1 b)$ Df

» $= \iota N_1 \cap x \ni [N_1 x = N_1 a \cap N_1 b]$ Dfp F 1902 §mlt 1·0·32.

La seconda Df contiene il segno ι incluso nella Df del segno min.

Quindi secondo la condizione di Leibniz, la 2^c è da preferirsi alla prima.

Altre volte il F 1902 segue le regole di Leibniz.

Così la Df di C, § Cmb 1·0 è preferita alla ·6 la quale contiene il simbolo !; la 1·0 non differisce dalla ·6 che per avere in luogo del segno ! la sua Df, per mezzo del principio d'induzione.

La seconda regola di Leibniz è qualche volta applicata nel F. Infatti in molti casi, in F 1902, subito dopo la Df del nuovo segno segue la proposizione che ne afferma l'esistenza che può essere condizionale se il simbolo definito contiene lettere variabili.

Altre volte L. dà per le Df una regola in contraddizione colle precedenti da lui date, qualora si riferisca agli stessi oggetti. Egli dice:

« In omni definitione constare debet id quod definitur esse possibile, interdum etiam quaeritur, ut actu existat, ut in definitione morborum » (p. 328).

Ma probabilmente le definizioni di cui qui si tratta escono dal campo della logica matematica, e si riferiscono alle discussioni filosofiche, assai vive altra volta, tra nominalisti e realisti.

Questo diverso senso, che qui non interessa, della parola *definitio*, risulta ad es. dai due passi seguenti in relazione con quello sopra riportato:

« ... Ita si quis definit febres hecticas, malignas, simul asserit *eas observari*. In his quae distinctae non intelligimus opus experientia ad costituendas definitiones » (p. 328).

« In *notionibus empiricis*, ut auri, et aliorum in quibus de possibilitate non constat nisi a posteriori, non habentur definitiones nisi provisionales » (p. 329).

IV.

Come abbiamo detto, Leibniz trovò la maggior parte delle P contenenti i simboli $\supset$ $=$ $\frown$ $\smile$ $-$ Λ.

Esse si trovano spesso ripetute in molti fogli sparsi. I più importanti tentativi di redazione sono i tre registrati dal Gerhardt coi numeri XVIII, XIX, XX nel t· 7 di Phil. Schriften ed i quattro:

VII, B, II, 2; VII, B, II, 62; VII, B, II, 63; VII, c, 97 pubblicati dal Couturat a p. 246, 260, 261, 356.

In nessuna di queste redazioni egli riuscì a fondare in un tutto organico le diverse P scoperte.

Sono queste:

Per Leibniz « quaelibet litera ut *a*, *b*, *l*, etc. significat $-$ vel terminum,... vel propositionem.

Ciò posto, le P di Leibniz coi simboli del F, si scrivono:

1. $a = a$ 2. $a = b \,.\!\supset\!.\, b = a$ 3. $a = b \,.\, b = c \,.\!\supset\!.\, a = c$
4. $a \supset a$ 5. $a \supset b \,.\, b \supset c \,.\!\supset\!.\, a \supset c$ 6. $a \frown b \supset a$ 7. $a \frown b \supset b$
8. $a \supset b \,.\, a \supset c \,.\!\supset\!.\, a \supset b \frown c$. 9. $a \supset b \,.\!\supset\!.\, a \frown c \supset b \frown c$
10. $a \supset b \,.\, c \supset d \,.\!\supset\!.\, a \frown c \supset b \frown d$ 11. $a = a \frown a$ 12. $a \frown b = b \frown a$
13. $a = b \,.\!=\!.\, a \supset b \,.\, b \supset a$ 14. $a \supset b \frown c \,.\!=\!.\, a \supset b \,.\, a \supset c$
15. $a \supset b \,.\!=\!.\, a = a \frown b$ 16. $-(-a) = a$ 17. $a \supset b \,.\!\supset\!.\, -b \supset -a$
18. $a \supset a \smile b$ 19. $b \supset a \smile b$ 20. $a \supset c \,.\, b \supset c \,.\!\supset\!.\, a \smile b \supset c$
21. $a \supset b \,.\!\supset\!.\, a \smile c \supset b \smile c$ 22. $a \supset b \,.\, c \supset d \,.\!\supset\!.\, a \smile c \supset b \smile d$
23. $a \smile a = a$ 24. $a \smile b = b \smile a$ 25. $b \supset a \,.\!=\!.\, a \smile b = a$
26. $a - a = \Lambda$ 28. $a \supset b \,.\!=\!.\, a - b = \Lambda$

E da notarsi però che queste 28 P. che ho trascritto sostituendo alle notazioni non sempre uniformi di Leibniz quelle del F, sono in questo accompagnate dall'ipotesi che le lettere a, b, c, siano *classi*. La doppia interpretazione che dà loro Leibniz si trova ancora nel tomo I del F, e più diffusamente in RdM tomo I, p. 1, a. 1891; ma fu abbandonata nelle successive edizioni del F, essendo le P stesse prive d'ipotesi e perciò alquanto vaghe. (Cfr. *Introduction au F*, a. 1894, p. 17, § 15).

Ma per passare dal calcolo delle classi a quello delle P, scrivendo completamente in simboli anche l'interpretazione proposizionale delle P considerate, occorrono i simboli Cls, $\ni$, ε e gli indici al segno $\supset$.

Aggiungerò che L. vide che queste P erano dipendenti le une dalle altre. Così prendendo le P15 come Df al segno $\supset$, riuscì a dimostrare le P 4 — 10, 13 e 14.

Ecco come dimostra p. es. la P 6:

$a = aa \,.\, ab = ab \,.\supset.\, ab = aab \,.\supset.\, ab = aba \,.\supset.\, (ab) \supset a$ (p. 263).

E così la P5:

$$a \supset b \,.=.\, a = ab : b \supset c \,.\supset.\, b = bc \quad (1)$$
$$a = ab \,.\, b = bc \,.\supset.\, a = a\,(bc) = (ab)\, c \quad (2)$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad .\,(2)\,.\supset.\, a = ac \,.\supset.\, a \supset c \qquad \text{(p. 229)}$$

oppure in altro modo:

$$a = ab \,.\, b = bc \,.\supset.\, ab = ab\, bc = abc = (ab)\, c \,.\supset.$$
$$ab \supset c \,.\, a = ab \,.\supset.\, a \supset c \qquad \text{(p. 264).}$$

Per brevità, non cito i passi relativi a queste P, perchè in gran parte furono già riprodotti nelle varie edizioni del F. Noterò soltanto che conviene aggiungere ad F 1902 dopo la § 2 P 5·2 la citazione: LEIBNIZ, opusc. p.264: « patet coincidere has duas simul A est B et A est C, cum ista A est BC ... »; e così pure dopo la $\mathfrak{S}$ 2·2 LEIBNIZ, *PhilS.* p.237: « B+N = N+B seu transpositio nihil mutat ».

V.

Leibniz intravide l'identità della *deduzione*, col simbolo $\supset$. Egli scriveva:

(p.407) « Si A continet B, C continet D, potest sic formari: A continere B continet C continere D... ».

(p.408) « Si A est B et inde sequitur C est D... A est B

vocetur L, ...C est D vocetur M. Erit L = LM. Ita reducitur hypothetica ad cathegoricam ».

Altra volta cercando il senso di *omnis*, scrive:

(p. 252) « Omne B est C significat si A est B etiam A est C », dicitura molto vicina alla P:

$b,c \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}. \supset : b \supset c \,.=.\, a \,\varepsilon\, b . \supset_a . \, a\varepsilon c$ F § 2 P 4·2.

(p. 265) Distingue le lettere in *determinate* a, b, ...ed *indeterminate* y, z,...

(p. 383) Considera certe *literae generales* che indica con $\overline{y}$ o con $\overline{\overline{y}}$ e scrive ad esempio:

Cum dicitur nullum A esse B, sensus sit negari A $\overline{y}$ esse B, che sembra voler dire:

$$a,b\varepsilon \,\mathrm{Cls} \supset .\because a \supset - b . =: y\varepsilon a . \supset_y . y - \varepsilon b.$$

Precisa questa notazione, applicandola alla geometria:

« Locus constituitur per puncta seu loca simplicia. Itaque locus vocabitur $\overline{X}$ si lubet, qui constituitur per puncta quorum quodlibet dici potest X.

« Itaque locus in eo est quodvis eius punctum est. Si *omne* X sit Y, erit $\overline{X}$ in Y.

... Spatium est locus omnium punctorum: sit quodvis punctum P, erit spatium $\overline{P}$ ». (p. 540).

Con queste notazioni imperfette riuscì a scrivere diverse P di geometria, tra cui le notevoli Df di retta, piano, sfera, circolo, riportate in F 1902 § vct.

Però un ostacolo grave per L. era il non aver egli visto la differenza tra ε e $\supset$. Essa era nota agli scolastici.

Ad esempio in Petri Hispani, *Summulae logicales*, Venetii, a. 1572 a p. 237 si trova:

« Sciendum quod *omnis:* dupliciter sumitur: uno modo collective, ut omnes apostoli Dei sunt duodecim, non sequitur, ergo isti apostoli Dei sunt duodecim, demonstratis aliquibus de ipsis, alio modo sumitur distributive, ut hic omnes homines naturaliter xire desiderant ».

Ma egli era costretto a rigettare dal suo calcolo tutte le distinzioni degli scolastici, quasi in blocco. Infatti i *parva logicalia* contengono non solo delle sottili distinzioni sulla parola *omnes*, ma altresì su aliquod, nihil, possibile, est, si, tunc, ergo, possibilis), ecc. (conf. Leibniz, opusc. p. 243, 255. 362).

E noi abbiamo una prova della infruttuosità di questa via nel tentativo di Richeri del 1761 (cfr. RdM. a. 1894 t. 4, p. 120 e Lambert, *Nova acta Eruditorum*, a. 1766) che concluse assai poco appunto per aver voluto introdurre tanti simboli, quante sono le parole *possibile*, *aliquod*, *nihil*, etc.

VI.

Infine Leibniz vide che le formole da lui trovate ammettevano una rappresentazione aritmetica, che differisce alquanto da quella di F1902, § Dvr H5.

« Est et alia representatio propositionem per numeros. Nempe pro terminis ponendo numeros, Universalis affirmativa A est B, significat: A dividi potest per B » (p. 385).

Questa rappresentazione consiste nel considerare due numeri eguali quando contengono gli stessi fattori primi. Ciò posto, se si fa la sostitazione seguente:

$$(a \supset b, \frown, -) \mid (a \varepsilon \mathrm{N}_1 b, \times, 1)$$

si trasformano le P:

§2 1·1-·4 2·1·4·5·6 3·1·2·3 4·1 5·2·1 §- 1·2-·6

in altrettante verità aritmetiche.

VII.

Da quanto precede appare quanto sia elevato il posto che Leibniz occupa nella storia della logica, e quanto da questo punto di vista sia stata utile la pubblicazione del Couturat.

Egli dice, troppo modestamente, che la sua pubblicazione (p. III): « est un *recueil de morceaux choisis*, qui parfois se reduit presque à un catalogue ». Il volume edito dal Couturat di oltre 600 pagine supera di gran lunga le così dette edizioni complete di Gerhardt e di Erdmann.

Se però questo volume è venuto in buon punto a soddisfare i più urgenti desideri degli studiosi di logica, non conviene però dimenticare che urge tuttavia la pubblicazione completa ed integrale delle opere di Leibniz.

È un'opera colossale: si tratta di un centinaio di volumi in ottavo che occorrerà comporre, raccogliendo e decifrando con pazienza tutti i frammenti grandi e piccoli che Leibniz ha

lasciato, e di cui il primo buon modello è quello ora datoci dal Couturat.

L'Associazione internazionale delle Accademie si è assunta nell'aprile 1901 il compito di curare quest'edizione, riguardo alla quale credo opportuno riportare due ottime considerazioni.

La prima è relativa all' integrità e alla obbiettività dell'edizione (p. VII):

« On ne peut s'élever trop énergiquement contre un avis qui aurait été émis au sein de l'Association, et qui tendrait à « faire un choix » entre les manuscrits. Faire un choix! Mais c'est ce qu'ont fait déjà tous les éditeurs précédents; et le résultat en est que nous n'avons de documentation complète sur aucune des parties de l'œuvre de Leibniz, sur aucune des faces de son génie encyclopédique et de son activité universelle. Si l'édition projetée ne doit pas être absolument complète, ce n'est pas la peine de l'entreprendre, et de mettre en branle trois Académies pour faire un recueil qui soit à l'édition Gerhardt ce que celle-ci est à l'édition Erdmann. On dira que ces savants, pourtant intelligents ont mal choisi, et que le choix futur sera meilleur. Qu'en sait-on? Tout choix est essentiellement subjectif et arbitraire: ce qui intéresse celui-ci paraît sans importance à celui-là. Et puis, qui peut prétendre juger si tel fragment offre ou n'offre pas d' intérêt? Faut-il donc rappeler à des érudits que rien de ce qui émane d'un grand esprit comme Leibniz n'est insignifiant et indifférent, surtout lorsque cet esprit n'a presque rien publié de ses idées, et les a léguées à la posterité sous la forme de notes détachées et de brouillons parfois informes? On publie jusqu'aux moindres ébauches de Victor Hugo, et même d'auteurs de bien moindre valeur; et l'on dédaignerait les « petits papiers » de Leibniz, et on lui marchanderait le nombre des volumes? Ce n'est pas possible, ce serait indigne de notre temps, si curieux d' histoire, et si respectueux du passé, parfois jusqu'à la superstition ».

La seconda è relativa alla classificazione e all'ordinamento delle opere:

« Il n'y en a qu'un qui soit vraiment scientifique et objectif, car seul il respecte les connexions naturelles et génétiques qui existent entre les diverses productions de Leibniz: c'est le clas-

sement par ordre chronologique des tous les écrits sans distinction aucune ».

Questa edizione sarà senza dubbio, come il Couturat dice (p. XIV):
« la résurrection d'un génie vaste et divers comme la nature même qu'il embrassait et pénétrait, du plus grand esprit des temps modernes, et peut-être de tous les temps. Où plutôt ce sera sa première apparition et sa véritable revélation, puisque sa pensée, ensévelie dans une masse de manuscrits inédits, n'est pas encore complètement connue, qu'elle nous réserve encore des découvertes et des surprises, et qu' elle n'a pas encore produit tous ses fruits ».

G. VACCA.

DE LATINO SINE FLEXIONE

LINGUA AUXILIARE INTERNATIONALE

Lingua latina fuit internationalis in omni scientia, ab imperio Romano, usque ad finem saeculi XVIII. Hodie multi reputant illam nimis difficilem esse, iam in scientia, magis in commercio.

Sed non tota lingua latina est necessaria ; parva pars sufficit ad exprimendam quamlibet ideam.

§ 1. — *Casus.*

« Nominum casus semper eliminari possunt substitutis in eorum locum particulis quibusdam ».

LEIBNIZ. Ed. Couturat a. 1901, p. 67.

Lingua latina exprimit nominum casus cum praepositionibus « *de, ad, ab, ex,...* » et cum postpositionibus vel desinentiis. Prima methodus sufficit; ipsa sola invenitur in latino po-

pulare, a quo derivant linguae neolatinae, ut italica, franca, hispanica, etc.

Sumimus nomen inflexibile sub forma simpliciore, quae est ablativus, vel nominativus, vel alia.

Indicamus genitivo cum *de*, dativo cum *ad*, ablativo cum *ab*, *ex*, ... Accusativo indicatur cum constructione, ut in linguis neolatinis, scilicet cum serie: nominativo—verbo—accusativo, vel cum serie: *qui*-accusativo—nominativo—verbo.

Vocabulario latino commune continet nominativo et genitivo de nomen. Regula commoda haec est:

« Sumimus nomen inflexibile
« *a)* aut identico ad nominativo,
« *b)* aut nominativo, mutata desinentia -*us*, -*um*, -*u*, -*es*
« in -*o*, -*o*, -*o*, -*e*,
« *c)* aut genitivo, mutata desinentia -*i* in -*o*, -*is* in -*e*.
« *d)* ad nominativo *ego*, *tu*, *aliquis*,
« responde (ablativo) *me*, *te*, *aliquo*. »

Regula *a)* producit nulla ambiguitate, quae iam non sit in latino.

Regulae *b) c) d)* brevi exprimunt formatione de ablativo, cum reductione de 4-a declinatione ad 2-a, et cum reductione ad forma unica de 3-a declinatione.

§ 2. — *Genere masculino, feminino et neutro.*

« Discrimen generis nihil pertinet ad grammaticam rationalem ».
LEIBNIZ.

Nomen isolato non habet genere. Quum volumus indicare ille, scribemus explicite " mas, femina ".

Ita " mater est *bona* " fit " mater est femina bono "; sed idea de femina iam continetur in mater; igitur post simplificatione [1]: " mater est bono ".

Indicatione de genere evanescit saepe in lingua scientifica.

In lingua familiare sufficit conservare genere in uno pronomen " is, ea, id ", vel in antiquo " hi, hae, ho ".

---

[1] Juxta *Formulaire de Mathématiques* a. 1902, p. 7, Prop. 3·1 et 5·3.

§ 3. — *Numero singulare et plurale.*

« Videtur pluralis inutilis in lingua rationali ». LEIBNIZ.

Nomen isolato non habet numero. Ad indicando ille scribemus explicite " uno, plure „.

Ex. " unum os habemus et duas aures "
fit " habemus uno uno ore, et duo plure aure ",
et post simplificatione logico " uno uno" = " uno ", et " duo plure " = " duo ", nam " duo " continet idea de " plure ", propositio fit: " habemus uno ore et duo aure ".

Ex. " Omne homo est mortale, aliquo homo est nigro, multo homo est pauper, pauco homo est divite, plure homo est sapiens ".

Propositione : " Romani eligebant duo consules "
fit " Populo Romano eligebat duo consule ".

§ 4. — *Conjugatione de verbo.*

« Personae verborum possunt esse invariabiles, sufficit variari *ego, tu, ille*, etc. ». LEIBNIZ.

Lingua latino habet discurso directo, ut:
" Amicitia inter malos esse non potest "
et discurso indirecto:
" (Verum est) amicitiam inter malos esse non posse ".

Si nos utimur semper de discurso indirecto, in verbo evanescit desinentia de persona, de modo, et saepe de tempore.

Sumimus ergo nomen inflexibile, per persona modo et tempore, sub forma magis simplice, qui es imperativo, activo et passivo. Regula es :

« *a*) Ad forma inflexibile " es, pote, vol, fi "
« responde infinito " esse, posse, velle, fieri ".

« *b*) Ad forma inflexibile de alio verbo adde *-re*, et te habe « infinito, ut es in vocabulario latino.

« *c*) Ad verbo activo adde *re*, et te habe passivo.

« *d*) Nos transforma verbo deponente in activo ».

(Verbo " vol, dice, duce, face ", et regula *d*) non es exacto latino classico).

Nos indica persona cum " me, te, nos ... ", modo cum " si, ut, quod,... ", tempore cum " heri, jam, in passato, nunc, cras, in futuro, vol, debe, ...".

Ex. " Me scribe. — Vos lege. — Cras me i ad Roma. — Cras me, postquam veni ad Roma, scribe ad te, — Heri me lege dum te scribe et antequam Petro veni. — Si te narra, nos audi. — Ut te vale. "

§ 5. — *Altero reductione de desinentia de verbo.*

Exsta aequalitate logico:

lauda-nte = qui lauda
lauda-ndo = dum lauda
lauda-to = qui aliquo lauda
(hoc es: " quem aliquis laudat ", juxta regula de § 1)
lauda-turo = qui lauda in futuro
Petro lauda-re ab Paulo = Paulo lauda Petro.

Si in loco de primo membro de uno ex hic aequalitate nos scribe secundo, omne desinentia evanesce.

Sed aliquo desinentia, et non necessario, pote es utile, ut " -nte, -to ", desinentia " -vi, -bi " de passato et de futuro, et forma neolatino: " habe ama-to, es ama-to, ... ".

§ 6. — *Vocabulario.*

Vocabulario latino commune suffice ut nos traduce hic lingua. Sed si plure auctore adopta " latino sine flexione ", tunc es utile publicatione de proprio vocabulario, qui:

1) Contine nomen et verbo, solo sub forma inflexibile.

2) Contine vocabulo internationale, ut " metro, dyne, ...".

3) Elige suo voce ex toto latinitate, etiam ex latino populare. Igitur nos posse sume regula:

« Omne voce qui pertine ad duo lingua neolatino, p. ex, italo et franco, es latino ».

4) Simplifica derivatione et compositione de vocabulo.

De ultimo subiecto me hic breviter dice.

a) Substantivo diminutivo: " hortulo = parvo horto ", etc.

b) Substantivo abstracto ex adiectivo vale adiectivo. Ex. " bonitas = bono ", " altitudo = alto ".

c) Adiectivo qui deriva ab sustantivo vale genitivo: " aureo = de auro ", " vitulino = de vitulo ", "Romano = de Roma ", " chartaceo = ex charta ", " animoso = cum animo ".

d) Substantivo abstracto ex verbo vale verbo.

" Laudatio " = italico " il lodare " = anglo " to laud ", vel simpliciter " laud ".

" Vita est cogitatio " fi " vivere est cogitare ", in discurso indirecto (§ 4) " vivere esse cogitare ", post reductione ad radice: " vive es cogita ".

Ita " amor = ama ", " gaudio = gaude ",...

e) " Lauda-tore = qui lauda ", vel " qui sole lauda ".

f) Adiectivo verbale: " erra-bundo = qui saepe erra ", " tim-ido = qui sole time ", " mord-ace = qui sole morde ", " ama-bile = qui aliquo pote ama ".

g) Adverbio extracto ex adiectivo vale adiectivo. Ita in latino classico " brevi, raro, ..." es adiectivo et adverbio.

h) In modo simile ad " ne-sci, ne-fasto, n-ullo " nos forma: " ne-facile = difficile " " ne-digno = indigno " " ne-normale = abnormale " " ne-es = de-es " " ne-multo = pauco ", etc.

i) Alio praefixo, p. ex. " ab ", indica oppositione.

j) In modo simile ad " agricola = agro-colente " " homicidio = homo-caede ", lice scribe: " auro-corona = corona de auro ", " me-patre = meo patre ", etc.

Lingua sinense habe omne hic simplificatione, et alio.

§ 7. — *Pronuntia de latino.*

Pronuntia de latino non es uniforme in diverso populo. Forma meliore es antiquo:

ce, ci ut italo *che, chi,* franco *que, qui,* germano *ke, ki.*
ge, gi » *ghe, ghi,* » *gue, gui* » *ge, gi.*
ti » *ti,* non *zi.*
y ut franco *u,* germano *ü.*

ae ut *e* aperto, franco *è*, germano *ä*.
oe ut franco *eu*, germano *ö* (hoc es conventione).
th ut anglo *th*, graeco moderno θ.
ph, sono producto quando nos suffla flamma. (Deriva ex graeco antiquo φ; graeco moderno pronuntia *f*).
ch, ut germano *ch*, etrusco *c*.
h, aspirato, ut germano.
rh, ut franco *r*.
qu sona ut *cu* in neolatino; hic duo syllaba es differente et in positione, et in pronuntiatione antiquo (1).

Omne alio litera ut in italo.

HISTORIA

Quum plure populo es in reciproco contacto, per ratione de politica, scientia et commercio, semper se manifesta necessitate de inter-lingua.

Diverso populo, sub imperio Romano, adopta latino populare, qui es latino cum simplificatione de caso (§ 1).

Populo Saxone, in contacto cum Anglo, forma lingua anglo moderno, qui contine simplificatione de caso (§ 1), de genere (§ 2), et in parte simplificatione de persona et de modo (§ 4). Lingua anglo tende ad perdita de omne flexione et ad monosyllabismo.

Ita, in tempore historico, ori " Lingua franca " in porto de Mediterraneo, " Pidgin " in Sina, " Urdu " in India, etc.

Hodie omne homo de Europa et de America, qui habe plure relatione cum extero, clama lingua internationale. Nam suffice lingua nationale ad qui habe solo relatione nationale. Conoscentia de tres aut quatuor lingua principale suffice ut nos lege, in originale aut in versione omne libro jam celebre. Sed hodie Russo, Polacco, Rumeno, Japonico, ... publica in suo lingua libro originale, et non solo libro scholastico.

Adoptio, ut inter-lingua, de lingua vive-nte, non es possibile, per causa de politica.

---

(1) Vide A. Meillet, *Introduction à l'étude comparative des langues indo-européennes*, Paris a. 1903 pag. 56.

Plure homo propone latino classico. Vide :

Prof. A. VALDARNINI de universitate de Bologna, *Necessità d'una lingua internazionale e lo studio del latino*, in " Primo congresso internationale latino ", Roma a. 1903.

Hic congresso exopta :

« ut sermo latinus inter gentes universas communis ha-« beatur, et adhibeatur ad humanitatis commercium fovendum, « augendum, tenendum ».

Ibi congressista loque neolatino, ut italico, franco, provenzale, rumeno et castellano, raro latino classico.

Et periodico " Phenix " in London, " Praeco latinus " in Philadelphia, " Vox urbis " in Roma sustine idem idea; sed primo mori in anno 1892, et secundo in 1902. Ergo adoptio de latino fi semper minus probabile.

Multo auctore, in vario tempo, propone lingua plus vel minus artificiale.

Vir doctissimo, L. COUTURAT professore in Universitate de Toulouse, in libro *La Logique de Leibniz*, Paris a. 1901 p. 608, expone :

Ars magna de R. LULLE a. 1234-1315,
Ars magna sciendi de KIRCHER a. 1669,
Ars signorum de DALGARNO a. 1661,
Philosophical language de WILKINS a. 1668.

Postea Leibniz diffuse et profunde stude hic subjecto; sed nihil publica. Suo studio mane sepulto in bibliotheca de Hannover, usque ad nostro die; primo Dr Vacca in RdM., postea Couturat in libro citato detege et publica parte de hic manuscripto. Suo importantia magis pate, et denique L. COUTURAT publica « Opuscules et fragments inédits de Leibniz », Paris a. 1903, p. XVI-682, qui contine studio de Leibniz, summe praetioso per constructione de Vocabulario philosophico.

Libro, nunc edito, L. COUTURAT et L. LEAU *Histoire de la langue universelle*, Paris a. 1903 p. XXI+571, expone 56 projecto de lingua artificiale.

Me hic breve loque de magis noto.

SCHLEYER, parrocho, in anno 1881 publica « Volapük », qui es transformatione de lingua anglo, ut ipse dice.

Hic lingua regularisa declinatione de nomen, et conjugatione de verbo; sed introduce nullo simplificatione rationale, qui Leibniz propone. Ille contine immenso numero de conventione. Volapük sume in principio multo diffusione. In anno 1888 habe 283 club, et 25 periodico, in omne parte de terra. Plure conventione produce discordia inter sectatore, et post congresso de Paris, in anno 1889, hic lingua decade et mori.

ZAMENOF, doctore in medicina, in anno 1887, publica « Esperanto », qui contine simplificatione de genere (§ 2), de persona (§ 4). Sed non contine simplicatione de caso (§ 1), de numero (§ 3) et de modo (§ 5). Esperanto reduce toto grammatica ad 16 regula, de qui nullo es necessario.

Et Esperanto contine magno numero de conventione, etsi minus quam Volapük, et in grammatica, et in vocabulario.

Esperanto habe hodie 9 periodico; jam plure sectatore propone simplificatione; ille seque via de Volapük.

Et notato-digno es « Langue bleu » de L. BOLLACK. Ibi, ex numero de littera, nos vide si voce es vacuo, vel pleno, ut in sinense.

Nunc me loque de projecto cum pauco novo conventione.

« Lingua » de HENDERSON, a. 1888, es vocabulario latino, cum grammatica de typo Anglo.

D[r] Daniel ROSA simplifica idea de Henderson, et publica « Le nov-latin » [1]. Ille dice:

« Le nov-latin non requirer pro le sui adoption aliq con-
« gress. Omnes poter, cum les praecedént regulas, scriber statim
« ist lingua. ... Sic faciént ils vol valide cooperar ad le universal
« adoption de ist international lingua et simul ils vol poter
« star legé ab un mult major numer de doctes quam si ils haber
« scribé in quilibet alter vivént lingua ».

Ex hoc resulta quod Novlatin conserva pauco flexione (plurale in *-s*, 2 participio, ...), et es quam proximo ad " lingua rationale " de Leibniz et ad " latino sine flexione ".

---

[1] *Bollettino dei Musei di Zoologia e Anatomia comparata della Regia Università di Torino*, a. 1890.

Domino George J. HENDERSON, in periodico, « The lingua franca of the future », qui ille dirige, a. 1901, perfectiona suo projecto, et dice:

« Quare debe-nos non facere ex i Latine Lingue i Interna-
« tionale Lingue?

« I Latine Lingue esse nimis difficile. Post decem annes
« de studere, pauce discipules pote, legere facile, vel scribere
« accurate, vel loquere aliquantulum i Latine Lingue. »

(*I* articulo, plurale in *-s*, desinentia *-e*, ...)

Societate, qui habe nomen " Akademi internasional de lingu universal " adopta vocabulo magis internationale, et post multo studio et discussione, in a. 1902, publica " Idiom neutral ".

« Idiom neutral es usabl no sole pro scribasion, ma et pro parlation .»

Ergo, principio de maximo internationalitate duce ad vocabulo latino.

" The American Philosophical Society " in an. 1887, pro formatione de inter-lingua, propone abolitione de articulo (ut in latino et in russo), de flexione de adjectivo, de caso de nomen, de persona et modo de verbo, et, in modo dubitativo, abolitione de plurale de nomen, et tempo de verbo.

Quaestio de inter-lingua nihil habe hodie commune cum ideographia, qui nos adopta in « Formulario mathematico ».

Ideographia es synthese; cum auxilio de pauco idea primitivo, circa decem, ille compone idea complexo; ita *hodie* cum ideographia nos pote scribe toto mathematica, sed mathematica solo.

Lingua artificiale es analyse. Ille decompone idea de lingua commune in alio idea plus simplice.

Si in futuro analyse et synthese invicem conveni, ut duo exercito de minatore, qui labora tunnel ex duo extremitate, tunc « Lingua rationale » et « Characteristica universale » de Leibniz fore idem.

Vide quoque:

H. DIELS, *Ueber* LEIBNIZ *und das Problem der Universalsprache,* Berlin Sitzungsberichte d. Akademie, a. 1899 p. 579.

Prof. G. BELLAVITIS, *Pensieri sopra una lingua universale e su alcuni argomenti analoghi*, Mem. dell'Ist. Veneto; vol. XI a. 1862, pag. 33-74.

Délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale, qui porta firma de numeroso scientiato de plure universitate, academia, repraesentante de societate philosophico, de commercio et de sport. Ipse delegatione declara:

« Lingua auxiliaria internationale

« 1. posse servi ad relatione de vita sociale, de commercio,
« et de scientia et philosophia.

« 2. Omne homo, qui habe instructione elementare medio,
« facile disce hic lingua.

« 3. Hic lingua es proprio ad nullo natione. »

Prof. L. COUTURAT explica hic idea in opusculo: *Pour la langue internationale* » a. 1901. Periodico *Revue des questions scientifiques*, Bruxelles a. 1902, t. 1, p. 547-586 reproduce scripto de Couturat, cum observatione de P. P. PEETERS. Couturat responde in t. 2, pag. 213-230. Nullo objectione de PEETERS vale per " Latino sine flexione ".

CONCLUSIONE

Articulo, qui praecede, proba quod flexio de nomen et de verbo non es necessario.

« Se, invece di dizionario latino, noi cercare ogni parola
« in dizionario italiano, noi scrivere in italiano senza flessione. »

Articulo, qui seque, contine versione litterale de plure propositione Germano et Anglo. Ille proba, quod suppressio de omne flexio non redde discurso magis longo.

G. PEANO.

PRINCIPIO DE PERMANENTIA

Exercitio de Latino recto

[Omne vocabulo es inflexibile.

Vocabulario latino commune, qui contine nominativo et genitivo de nomen, infinito de verbo, contine omne vocabulo de hic Nota, aut identico, aut cum abreviatione:

a) Si termina in *-a*, muta *-a* in *-are*, vel in *-ari*, et es infinito de verbo.

b) Si termina in *-e*, muta *-e* in *-ere*, vel *-i*, et es infinito de verbo;
vel muta *-e* in *-is* et es genitivo de nomen,
» » » *-es* et es nominativo de nomen.
In loco de *me*, *te*, *aliquo*, quaere *ego*, *tu*, *aliquis*.

c) Si termina in *-i*, muta *-i* in *-ire*, vel *-iri*, et es infinito de verbo.

d) Si termina in *-o*, muta *-o* in *-us* *-um* *-u*, et est nominativo de nomen, vel muta *-o* in *-i* et es genitivo de nomen.

e) *es* quaere *sum*, *esse*.]

Aliquo auctore introduce numero negativo, fracto et imaginario, ut applicatione de regula, qui ille dice " principio de permanentia „. Hic principio varia aliquanto prope diverso auctore.

Prof. SCHUBERT, in *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, t. 1, p. 11, expone hic principio sub forma claro sed erroneo. Ille dice:

« *Princip der Permanenz* in viererlei besteht:

« erstens darin, jeder Zeichnen-Verknüpfung, die keine der « bis dahin definierten Zahlen darstellt, einem solchen Sinn « zu erteilen, dass die Verknüpfung nach denselben Regeln « behaldelt werden darf, als stellte sie eine des bis dahin defi- « nierten Zahlen dar;

« zweitens darin, eine solche Verknüpfung als Zahl im er- « weiterten Sinne des Wortes zu definieren und dadurch den « Begriff der Zahl zu erweitern;

« drittens darin, zu beweisen dass für die Zahlen im er- « weiterten Sinne dieselben Sätze gelten, wie für die Zahlen « im noch nicht erweiterten Sinne;

« viertens darin, zu definieren, was im erweiterten Zah- « lengebiet gleich, grösser und minor heisst ».

Versione:

« Principio de permanentia ex quatuor articulo consta:

« 1. ad omne signo-reunione [1] qui non repraesenta numero « qui nos ante defini, nos tribue tale senso, ut nos posse tracta « reunione juxta idem regula, velut si hic reunione repraesenta « numero, qui nos ante defini;

« 2. nos defini hic reunione ut numero, in lato senso de « vocabulo, et ita nos extende idea de numero;

« 3. nos demonstra quod per numero in lato senso omne theorema vale, ut per numero in non lato senso;

« 4. nos defini, quod in campo de numero lato nos voca « aequale, maiore et minore ».

Si omne regula et omne theorema super numero in senso non lato subsiste super numero in senso lato, necesse es ut numero in senso lato es identico ad numero in senso non lato. Nam duo ente es inter se aequale, si omne proprietate de uno es quoque proprietate de alio. Hoc es ipse definitione de aequalitate:

« Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate » (Leibniz, vide Formulario § 2, P4·3) quod me traduce: « Plure ente es idem, si nos posse substitue uno de ille in loco de altero, et veritate (de propositione) es salvo ».

Quum nos trans-i ab uno specie de numero ad specie magis lato, semper debe omitte aliquo proprietate.

Relatione $a+b>a$

es vero per numero absoluto, falso per numero cum signo.

Si nos trans-i ab numero imaginario simplice ad quaternione, nos omitte proprietate commutativo de producto.

Ergo definitione, qui nostro auctore da de 0, de numero negativo, de fracto, etc. basa super principio absurdo. Hic definitione non es legitimo.

Nos repete idem critica ad *Elementare Arithmetik und Algebra* de ipse Prof. Schubert (Leipzig a. 1899, pag. 33) qui enuntia ipse principio cum primo et secundo articulo.

Hankel, *Theorie der Complexen Zahlensysteme*, Leipzig, a. 1867, quum nancisce « principio de permanentia de lege formale », dice in pagina 5:

---

[1] Vide « Latino sine flexione » § 6 *j*).

« Wenn $b>c$ ist,... die Substraction ist... unmöglich. Nichts « hindert uns jedoch, dass wir in diesem Falle die Differenz « $(c-b)$ als ein Zeichen ansehen, welches die Aufgabe $[(c-b)+b=c]$ « löst und mit welchem genau so zu operiren ist, als wenn es « eine numerische Zahl aus der Reihe 1, 2, 3... wäre ».

Versione: « Si $b>c$ es, subtractione es ne-possible. Nihil « obsta tamen, quod nos **in hic caso** considera differentia $(c-b)$ « ut signo, qui resolve quaestio, **et cum qui** exacte nos debe « opera, ut si ille numero ex serie 1, 2, 3,... **es** ».

Contra hic modo de ratiocinio Gauss antea dice:

« Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tanquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti ». (Formul. pag. 219). Versione:

« Si aliquo dice quod triangulo rectilineo aequilatero rec- « tangulo impossibile es, nemo tunc es qui nega. Sed si aliquo « velle contempla tale triangulo impossibile tanquam novo ge- « nere de triangulo, et applica ad illo omne alio proprietate de « triangulo, an qui tene riso? Hoc es lude cum verbo, vel po- « tius abute ».

Prof. CHRISTAL, *Algebra*, Edinburgh a. 1889, p. 6, re-dice idea de Hankel:

« Assuming that the quantity $+a-b$ always exists, we may show that the laws of commutation and association hold ».

Versione:

« Si nos assume quod quantitas $+a-b$ semper existe, posse monstra quod lege de commutatio et associatio mane ». (1)

Hoc es, si nos assume absurdo, non solo nos posse deduce lege de commutatione, sed omne lege qui nos velle, nam ex absurdo omne consequentia deriva.

Non sub forma de principio absoluto, sed sub forma de consilio, lice quod nos dice:

« Quum nos introduce novo calculo, es multo utile quod

---

(1) **Nota analogia grammaticale de « show » cum « monstra ».**

nos sume nomenclatura et notatione ita ut novo calculo fie quam maxime simile ad calculo antiquo ».

Me dice « quam maxime simile » ; « identico » es absurdo. Ita Algebra, qui indica cum idem signo $+$, $\times$, $=$... operatione non solo inter numero integro, sed etiam inter fracto, es magno progresso super longo methodo de antiquo graeco; Algebra reduce toto libro X de Euclide, noto per magnitudine et difficultate, ad uno pagina, qui professore sole doce in uno lectione in Instituto tecnico (Vide Formul. p. 111).

In saeculo ultimo plure auctore indica cum idem signo $+$, sive summa de algebra, sive resultante de vectore, et ita construe Calculo geometrico, qui in respecto ad Geometria, es idem progresso quam Algebra in respecto de Arithmetica graeco.

Tunc principio de permanentia idem es ac principio generale de oeconomia, qui subsiste in linguistica, didactica et politica, ut demonstra E. MACH, in capitulo de « natura oeconomico de progresso physico » de *Populär Vorlesungen*, Leipzig a.1903.

G. PEANO.

Sphaera es solo corpore qui nos pote vide ut circulo ab omne puncto externo.

Clar. Lüroth [1]) cense hic theorema novo, et da primo firmo demonstratione.

Me hic expone alio demonstratione magis simplice.

Theorema dice: Si projectione de aliquo corpore convexo u, ab omne puncto externo es cono circulare, hic corpore es sphaera.

1. Me appella a puncto externo ad u. Et b alio puncto externo ad cono $a\bar{}u$. (Symbolo $a\bar{}u$ indica cono solido indefinito qui habe vertice in a, projecta u, et es circulare per hypothesi; et symbolo $a\bar{}b$ indica recta indefinito qui transi per puncto a et b).

Duo cono $a\bar{}u$, et $b\bar{}u$ habe duo plano tangente commune qui se interseca in $a\bar{}b$.

---

1) *Zwei Beispiele für die Ableitung der Wahren aus der scheinbaren Gestalt eines Körpers*, von JACOB LÜROTH, Freiburg, 1902.

2. Super omne generatrice de superficie de cono $a^{-}u$, sta uno puncto de u. Me enim appella g aliquo generatrice de superficie de $a^{-}u$. Post, me projecta u de alio puncto b, qui es extra g sed super plano tangente ad cono $a^{-}u$, secundum generatrice g.

Tunc cono $b^{-}u$ habe super hoc plano (1) uno generatrice g'. Ergo puncto intersectione de g et g' es unico puncto de u super plano tangente, et super g.

3. Omne alio cono qui habe vertice super $a^{-}b$ et projecta u, es tangente ad duo idem plano tangente ad duo cono $a^{-}u$ et $b^{-}u$.

Omne hic cono involve sphaera.

4. Corpore u es parte de hic sphaera.

Nam si hoc non es, existe puncto de u extra aliquo cono qui projecta u, quod es absurdo.

5. Omne punto de superficie de sphaera es puncto de u.

Hoc es evidente per omne puncto de sphaera (me nunc exceptua duo punto qui es super perpendiculare de centro de sphaera ad recta $a^{-}b$), quia per omne puncto de sphaera transi uno generatrice de superficie de aliquo cono qui projecta u, de aliquo puncto de $a^{-}b$. Super hic generatrice es uno puncto de u, et uno puncto de sphaera. Ergo hic duo puncto coincide (4).

6. Etiam duo puncto qui me ante exceptua es puncto de u. Sit c uno de isto. Tunc me considera aliquo puncto p de plano tangente ad sphaera in c. Cono qui projecta sphaera de p habe generatrice de superficie qui transi per c; sed hoc cono projecta u: ergo c es in u.

7. Figura u es convexa. Ergo etiam omne puncto interno ad hic sphaera es puncto de u, et hic solo (4).

Ergo u es sphaera solido, sicut me vole demonstra.

Cum symbolismo a summo Leibnitio divinato, et nunc tandem in Formulario de mathematica redacto in systema, me sic scribe hic theorema:

1. sphaera $= \mathrm{p} \frown x \ni \exists (a,b) \ni [a,b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, a \mathrel{-\!=} b \,.\, \mathrm{d}(x,a) \leqq \mathrm{d}(a,b)]$ Df
2. cono $= \mathrm{p} \frown x \ni \exists (a,s) \ni [s \varepsilon \text{ sphaera} \,.\, a \varepsilon \mathrm{p}\text{-}s \,.\, x \varepsilon a+\mathrm{Q}(s-a)]$ Df
3. $u \varepsilon \mathrm{Cls'p} \,.\, \exists u \,.\, \mathrm{Med}u = u : x \varepsilon \mathrm{p} \,.\supset_x.\, x+\mathrm{Q}(u-x) \,\varepsilon\, \text{cono} \,.\supset.$
   $u \varepsilon$ sphaera

Genova, anno 1903 die 275. G. VACCA.

THEORIA

de

CONGRUENTIAS INTRA NUMEROS INTEGRO

per

MICHAELE CIPOLLA

Congruentias in genere - Theorema de Fermat, de Eulero et de Wilson - Congruentias de primo gradu - Congruentias de secundo gradu - Congruentias binomio - Gaussiano, radices primitivo, indices - Applicationes.

In ce scripto me collige, in ordine de tractatione, propositiones de theoria de congruentias intra numeros integro, que constitue primo parte de theoria de numeros que me spera confice postea.

Me adde et aliquo notitia historico et bibliographico, ut que lege pote cognosce origine et progressu de theoria et adhibe operas que contine suo explicatione.

Me non arroga ad me ut asseque proposito omnino in perfecto modo, sed me spera reverte ad incepto ut commuta et corrige, et adpone additamento sive in propositiones sive in notitia historico et bibliographico. Ideo me pete benevolentia et favore de omni que excole et dilige tali parte de Analysi, que cum optimo iure Gauss appella regina de Mathematica et me es laeto recipe consilio de omni genere.

Operas
que tracta de theoria de congruentias

A. M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*. Paris 1[e] éd. an VI (1798); 2[e] éd. 1808; 3[e] éd. 1830; réimpression facsimile de la troisième éd. Paris: Hermann, 1899 — Traductio in lingua germanico per H. Maser ex 3 ed., Leipzig 1886; ex 2 ed. Leipzig 1893.

C. F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, 1801 (= = Werke t. I) — Traductione in franco de Poullet-Delisle

(Recherches arithmétiques, Paris, 1807) — Traductione in lingua germanico de H. MASER *(Untesuchungen über hohere Arithmetik*, Berlin, 1889).

L. POINSOT, *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Journal de Liouville, t. X, 1845.

P. L. TCHEBYCHEF, Theoria de congruentias (in russo), S. Petroburgo, 1847. — Traductione in lingua germanico per H. SCHAPIRA, Berlin 1889. — Traductione in italico per I. MASSARINI, Roma 1895.

V. A. LEBESGUE, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris 1859; *Introduction à la Théorie des nombres*, Paris 1868.

H. I. ST. SMITH, *Report on the Theory of Numbers*, British Assoc. for the advancement of Sc., 1859, p. 228; 1860, p. 120; 1861, p. 292; 1863, p. 168; 1865, p. 322 = Coll. Math. Papers t. I., p. 38, 93, 163, 229, 263, 289.

P. LEJEUNE-DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegebenen von R. DEDEKIND, Braunschweig, 1 Auf. 1863, 2 Auf. 1871, 3 Auf. 1879, 4 Auf. 1894. — Traductione in italico ex 3 ed. per A. FAIFOFER, Venezia, 1881. — Traductione in russo, parte 1, per J. M. NASARJEWY, S. Petroburgo, 1899.

J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre Superieure*, 4ᵉ éd., 2 v., Paris 1877, 5ᵉ éd., 1885.

— Traductione in lingua germanico per G. WERTHEIM, Leipzig 1878.

G. WERTHEIM, *Elemente der Zahlentheorie*, Leipzig, 1887.

J. SOCHOTZKY, Algebra Superiore, v. 2, Fundamenta de theoria de numeros (in russo), S. Petroburgo, 1888.

T. J. STIELTJES, *Sur la theorie des nombres. Etude bibliographique*. Ann. de Toulouse, IV, 1890, pp. 1-103; Paris, Gauthier-Villars, 1895.

E. LUCAS, *Théorie des Nombres*, t. I. Paris 1891. (Alio tomo non es publicato pro morte de auctore).

P. BACHMANN, *Die Elemente der Zahlentheorie*, Leipzig, 1892.

G. B. MATHEWS, *Theory of Numbers*, Part. I, Cambridge 1892.

U. SCARPIS, *Primi elementi della Teoria dei numeri*, Milano, Hoepli, 1897.

E. CAHEN, *Elements de la Théorie des nombres*, Paris. 1900.

P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, Encykl. d. math. wiss. t. I, pp. 551-581. — I Teil, Leipzig, pp. X + 402, 1902.

L. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik: 2 Teil, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*; hrsg. von K. Hensel, 1 Absch., *Vorlesungen uber Zahlentheorie*, 1 Band, Leipzig, 1901.

G. Wertheim, *Onfangsgründe der Zahlenlehre*, Braunschweig, 1902.

P. Gazzaniga, *Gli elementi della teoria dei numeri*, Padova, Frat. Drucker, 1903.

§ 1 Congruentias in genere

* 1. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a,b,c,d \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset:$

·1 $a \varepsilon\, b+m\mathrm{n} \;.=.\; b \varepsilon\, a+m\mathrm{n} \;.=.\; a-b\; \varepsilon\, m\mathrm{n}$

Gauss scribe relatione $a \varepsilon\, b+m\mathrm{n}$ ita

$$a \equiv b \pmod{m}$$

et voca illo « congruentia »: « Si numerus *a* numerorum *b*, *c* differentiam metitur, *b* et *c* secundum *a congrui* dicuntur, sin minus, *incongrui*: ipsum *a modulum* appellamus. Uterque numerorum *b*, *c*, priori in casu alterius *residuum*, in posteriori vero *non residuum* vocatur » (D. A., art. 1.).

Legendre scribe $a = b + \mathrm{M}\ (m)$ et es contrario ad symbolo et denominatione de Gauss: « Ces équations entre des restes... se traitent comme les équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d'égalité ni des dénominations nouvelles assez *incongrues*, dont quelques géomètres font usage ». (*Essai*, etc., 2e éd., 2e suppl., p. 12, note).

Catalan seque notatione de Legendre: « Admirables (les Recherches Arithmétiques de Gauss) sauf les dénominations et la notation. Poullet-Delisle, traducteur de Gauss, dit qu' *elles peuvent étonner*. De son côté, Legendre s'est raillé des *espressions incongrues*, adoptées par le Géometre de Brunswick. Mais Legendre et Delisle avaient des oreilles françaises » (v. *Mélanges mathématiques* par E. C. Catalan, in Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, t. XIII, s. 2, 1886, p. 334).

Hodie denominatione et symbolo de Gauss es communi ad maximo parte de auctore, sed non es necessario introduc novo

symbolo in ce scripto, quod notatione $a\varepsilon\ b+m\mathrm{n}$ es satis simplice.

·2 $a\varepsilon\ b+m\mathrm{n}\ .\ b\varepsilon\ c+m\mathrm{n}\ .\supset.\ a\varepsilon\ c+m\mathrm{n}$

·3 $\text{———}\ .\supset.\ a+c\ \varepsilon\ b+c+m\mathrm{n}$

·31 $\text{———}\ .\supset.\ a-c\ \varepsilon\ b-c+m\mathrm{n}$

·4 $\text{———}\ .\ c\varepsilon\ d+m\mathrm{n}\ .\supset.\ a+c\ \varepsilon\ b+d+m\mathrm{n}$

·41 $\text{——————}\ .\supset.\ a-c\ \varepsilon\ b-d+m\mathrm{n}$

·5 $\text{———}\ .\supset.\ ac\ \varepsilon\ bc+m\mathrm{n}$

·51 $\text{———}\ .c\varepsilon\ d+m\mathrm{n}\ .\supset.\ ac\ \varepsilon\ bd+m\mathrm{n}$

·52 $\text{———}\ .\ r\varepsilon\mathrm{N}_0\ .\supset.\ a^r\ \varepsilon\ b^r+m\mathrm{n}$

·6 $ac\ \varepsilon\ bc+m\mathrm{n}\ .\supset.\ a\ \varepsilon\ b+[m/\mathrm{D}(c,m)]\mathrm{n}$

·7 $(b+m\mathrm{n})\frown(b+n\mathrm{n}) = b+\mathrm{mlt}(m,n)\times\mathrm{n}$

·8 $a\ -\varepsilon\ b+\mathrm{nD}(m,n)\ .\supset.\ -\exists\ (a+m\mathrm{n})\frown(b+n\mathrm{n})$

·9 $a\varepsilon\ b+\mathrm{nD}(m,n)\ .\supset.\ (a+\mathrm{n}m)\frown(b+\mathrm{n}n)=$
$a+m\{\mathrm{n}\frown x\ni[mx/\mathrm{D}(m,n)\ \varepsilon\ (b-a)/\mathrm{D}(m,n)+\mathrm{n}n/\mathrm{D}(m,n)]\}$

·91 $\mathrm{D}(m,n)=1\ .\supset.\ (a+\mathrm{n}m)\frown(b+\mathrm{n}n) = a+\mathrm{n}m\frown(b-a+\mathrm{n}n)$

§ 2 Residuo de functiones particulari

* 2. $p\varepsilon\mathrm{Np}\ .\ m,n\varepsilon\ \mathrm{N}_1\ .\supset:$

·1 $\mathrm{C}(m,n)\ \varepsilon\ \mathrm{C}[\mathrm{quot}(m,p),\ \mathrm{quot}(n,p)]\times$
$\times\mathrm{C}[\mathrm{rest}(m,p),\mathrm{rest}(n,p)]\ +\ p\mathrm{n}$

·2 $\mathrm{C}(m,n)\ \varepsilon\ \Pi[\mathrm{C}\{\mathrm{rest}[\mathrm{quot}(m,p^r)],\mathrm{rest}[\mathrm{quot}(n,p^r),p]\}|r,\mathrm{N}_0]+\mathrm{n}p$

·21 $m,n\ \varepsilon\ \mathrm{n}p\ .\supset.\ \mathrm{C}(m,n)\ \varepsilon\ \mathrm{C}[\mathrm{quot}(m,p),\ \mathrm{quot}(n,p)]+\mathrm{n}p$

·22 $n\varepsilon\ 1\cdots(p-1)\ .\supset.\ \mathrm{C}(p,n)\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1\times p$

{LEIBNIZ, Math. Schr., t.7, p.102}

·23 $n\varepsilon\ 0\cdots(p-1)\ .\supset.\ \mathrm{C}(p-1,n)\ \varepsilon\ (-1)^n+\mathrm{N}_0\times p$

·24 $n\varepsilon\ 0\cdots(p-2)\ .\supset.\ \mathrm{C}(p-2,n)\ \varepsilon\ (-1)^n(n+1)+\mathrm{N}_0\times p$

·25 $n \varepsilon 0 \cdots (p-3) . \supset . C(p-3,n) \varepsilon (-1)^n(n+1)(n+2)/2+N_0 \times p$

·26 $p \varepsilon \mathrm{Np}-\iota 2 . n \varepsilon 2 \cdots (p-1) . \supset . C(p+1,n) \varepsilon N_1 \times p$

{2·1·2···26, LUCAS, American J. a. 1878, t. I. p. 229, et Théorie des nombres, 1891, pp. 417-420}

P2·22 = Form. 1902, p. 72, 12·7 . ·23 = F, p. 72, 12·71 . ·24 = F, p. 72, 12·73 . ·26 = F, p. 72, 12·72.

* 3. $p \varepsilon \mathrm{Np} . m \varepsilon N_1 . \supset :$

·1 $m -\varepsilon (p-1) \times N_0 . \supset . \Sigma[1 \cdots (p-1)]^m \varepsilon N_1 \times p$

{LIONNET, v. CATALAN, Mém. de l'Ac. de Belgique, t. 46, 1886, p. 14}

·2 $m \varepsilon (p-1) \times N_0 . \supset . \Sigma[1 \cdots (p-1)]^m \varepsilon -1+N_1 \times p$

·3 $p \varepsilon \mathrm{Np} . p > 3 . \supset . \mathrm{nt}\Sigma / [1 \cdots (p-1)] \varepsilon p^2 \times N_1$

{OSBORN, 1892, The Messenger of Math., t. 22, p. 51}

·4 $p \varepsilon \mathrm{Np} . p > 3 . \supset . \mathrm{nt}\Sigma / [1 \cdots (p-1)]^2 \varepsilon p \times N_1$

{GLAISHER, 1900, Quarterly Journ. of Math. t. 31, p. 337}

P3·1 = F, p. 138, 20·1 . ·3 = F, p. 138, 20·1 . ·4 = F, p. 138, 20·2.

§ 3 Theorema de Fermat, de Eulero et de Wilson

* 4. $m \varepsilon N_1 . p \varepsilon \mathrm{Np} . a \varepsilon \mathrm{n} . \supset :$

·1 $D(a,m)=1 . \supset . a \upharpoonright \Phi m \varepsilon 1+m\mathrm{n}$

Ce propositione es dicto « theorema de EULERO », nam illo pertine ad EULERO, que primo stude functione Φ (EULER, Novi Comm. Acad. Sc. Petrop. a. 1760-61, t. 8, pp. 85-103, Act. Ac. Sc. Petrop. a. 1780, t. 4_2, p. 18: Φm= numero de numeros que non supera m et es primo cum m). Symbolo Φ es introducto a GAUSS (1801, Werke t. 1 p. 30); EULERO ute simbolo Π (Acta Ac. Sc. Petrop., 1780, p. 18). LUCAS (T. de Nombres, 1891) voca illo *indicatore*, vocabulo introducto a CAUCHY (Oeuvres, s. 1, t. 6, p. 124) in sensu pauco differente).

·11 $a -\varepsilon \mathrm{n}p . \supset . a^{p-1} \varepsilon 1+\mathrm{n}p$

Ce theorema maxime elegante et fondamentali in theoria de congruentias es appellato *theorema de Fermat*, quod FERMAT

primo (a. 1640) enuntia illo (v. Oeuvres, Paris 1891, t.2 p. 209). LEIBNIZ primo demonstra illo (Math. Schr. t. 7, p. 154), sed suo demonstratione non es noto in tempore de GAUSS (v. D. A., p. 54 nota).

EULERO publica primo demonstratione in Comm. Ac. Sc. Petrop., t. 8, p. 143 (a. 1736), et altero in Novi Comm. Ac. Sc. Petrop., t. 8, p. 70. Vide et LAMBERT, Acta Eruditorum, a. 1769, p. 109; Gauss, D. A. art. 49-51; LEGENDRE, Essai etc, 2^e^ éd., n. 129.

Secundum HEANS (Messenger of Math., a. 1898, t. 27, p. 174), Mathematicos sinense novi ce theorema, per $a=2$, e tempore de CONFUCIO (CON-FU-TSE) a. —550 ⁻ —447; sed illos puta es vero propositione inverso:

$$p\varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, 2^p-2 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1\times p \;.\supset.\; p\varepsilon \mathrm{Np},$$

quod es falso (v. meo scripto: Sui numeri composti che verificano la congruenza di Fermat $a^{P-1}\equiv 1$ (mod. P), Ann. di Mat, a. 1903, t. 9, s. 3, pp. 139-160; v. et P 49, 50 de ce scripto).

·2 $m\varepsilon (\mathrm{N}_1+4)\text{-}\mathrm{Np} \;.\supset.\; (m-2)! \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1 m$

·3 $(p-2)! \;\varepsilon\; 1+\mathrm{N}_0\times p$

{2·3 LEIBNIZ, Mss. Mat. t.3 B11 fol. 10

·4 $(p-1)! \;\varepsilon\; -1+\mathrm{N}_1\times p$

Ce propositione es dicto « theorema de WILSON », quod WARING, (*Meditationes Algebricae* ed. I., a. 1770, p. 218; ed. III, a. 1782, p. 382), attribue illo ad WILSON, suo discipulo. Primo demonstratione de ce P. pertine ad LAGRANGE (Nouv. Mém de l'Ac. de Berlin, a. 1771, t. 2, p. 125 = Oeuvres, t. 3, p. 425). EULERO trade novo demonstratione in *Opuscula analytica*, S. Petr. a. 1783, t. 1., p. 329), GAUSS alio in Disquis. arith., art. 77 et alio LEGENDRE in Essai, 2^e^ ed. n. 130.

Theorema de WILSON es casu particulari de propositione circa numeros primo que pertine ad J. STEINER (J. f. Math. t. 13, a. 1835, p. 356 = Werke t. 2, p.7: vide et JACOBI, ibidem t. 14, a. 1835, p. 64 = Werke t. 6, p. 262).

·5 $p\varepsilon \mathrm{Np} \;.=.\; p\varepsilon \mathrm{N}_1+1 \,.\, (p-1)!+1 \;\varepsilon\; \mathrm{N}_1\times p$

·6 $p \;\varepsilon\; 4\mathrm{N}_1+1 \;.\supset.\; \{[(p-1)/2]!\}^2 \;\varepsilon\; -1+\mathrm{N}_1\times p$

·7 $p \varepsilon 4N_1 - 1 . \supset . \{[(p+1)/2]!\}^2 \varepsilon 1 + N_1 \times p$

(P ·6 ·7 es enuntiato in *Meditationes algebricae de* WARING (a. 1770) sed demostratione pertine ad LAGRANGE (a. 1771, Oeuvres, t. 3, p. 431) Vide et LEGENDRE, Essai, 2e éd, n. 131.:

P ·7 pote es enuntiato

$$p \varepsilon 4N_1 - 1 . \supset . [(p+1)/2]! \varepsilon (1 + N_1 \times p) \cup (-1 + N_1 \times p)$$

Quaestione de investiga in quali casu residuo de $[(p+1)/2]!$, sequente modulo p, es congruo 1 aut −1, posito a LEJEUNE DIRICHLET (J. f. Math., t. 3, a 1828, p. 401 = Werke t. 1, p. 105) es resoluto a JACOBI (ibidem, t. 9, 1832, p. 189 = Werke t. 6, p. 240), que trade ce propositione

$$p \varepsilon 4N_1 - 1 . \supset . [(p+1)/2]! \varepsilon (-1) \uparrow \mathrm{Num}[(p+1)/2 \cdots p \frown n^2 + np]$$

KRONECKER et LIOUVILLE da alio regulas minus simplice [J. de Math (2), t. 5, 1860, p. 127, 267]

·8 $m \varepsilon (Np - \iota 2) \uparrow N_1 \cup 2[(Np - \iota 2) \uparrow N_1] \cup \iota 4 . \supset .$
$\Pi\{1 \cdots m \frown x \ni [D(x,m) = 1]\} \varepsilon -1 + N_1 m$

·9 $m \varepsilon N_1 - \iota 4 - (Np - \iota 2) \uparrow N_1 - 2[(Np - \iota 2) \uparrow N_1] . \supset .$
$\Pi\{1 \cdots m \frown x \varepsilon [D(x,m) = 1]\} \varepsilon 1 + N_0 m$

P ·8 ·9 constitue « theorema de WILSON amplificato ». GAUSS (D. A. art. 70) enuntia illo et da aliquo notione circa demonstratione, pro que vide BRENNECKE, CRELLE et ARNDT, J. f. Math., t. 19, a. 1839, p. 319; t. 20, a. 1840, p. 29, et t. 31, a. 1846, p. 329.

P4·1 F. 1902, p. 143, P·2 . ·11 F. p. 71, P·2. . P4·2 F. p. 72, 12·1 . ·3 F. p. 72, 12·2 . ·4 F. 12·3 . ·5 F. 12·4 . ·6 F. 12·5 . ·7 F. 12·6.

✻ 5.

·0 $m \varepsilon N_1 + 1 - 8N_1 . \supset . \Psi m = \mathrm{mlt}[\Phi x | x, (Np \uparrow N_1) \frown m/N_1]$ Df

·01 $m \varepsilon 8N_1 . n \varepsilon \mathrm{mp}(2, m) . \supset .$
$\Psi m = \mathrm{mlt}\{2^{n-2}, \Phi x | x, [(Np - \iota 2) \uparrow N_1] \frown m/N_1\}$ Df

·02 $\Psi 1 = 1$ Df

·1 $m \varepsilon N_1 . \supset . \Psi m \varepsilon N_1 \frown m/N_1$

·2 $m \varepsilon N_1 - \iota 4 - (Np - \iota 2) - 2[(Np - \iota 2) \uparrow N_1] . \supset . \Psi m < \Phi m$

Ψm = indicatore reducto de m. v. LUCAS, Théorie des Nombres, 1891, p. 428

·3 $p \varepsilon Np - \iota 2 . a, b \varepsilon n - np . r, s \varepsilon N_1 . a \varepsilon b + p_r (n - np) . \supset .$
$a \uparrow p^s \varepsilon b \uparrow p^s + p^{r+s}(n - np)$

·31 $a,b\varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\, r,s\varepsilon\, \mathrm{N}_1+1 \,.\, a\varepsilon\, b+2^r(2\mathrm{n}+1) \,.\supset.$
$a^s\ \varepsilon\ b^s+2^{r+s}(2\mathrm{n}+1)$

·32 $a\varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\, s\varepsilon\, \mathrm{N}_1+2 \,.\supset.\, a\upharpoonleft 2^{s-2}\ \varepsilon\ 1+2^s\mathrm{n}$
(V. GAUSS, Disq. Arith. art. 90.)

·4 $a\varepsilon\mathrm{n} \,.\, m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(a,m)=1 \,.\supset.\, a\upharpoonleft\Psi m\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}m$

·5 $a\varepsilon\mathrm{n} \,.\, m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, n=\max|\mathrm{mp}(x,a)|x,\mathrm{Np}| \,.\supset.$
$a\upharpoonleft(n+\Psi m)\ \varepsilon\ a\upharpoonleft n+m\mathrm{n}$
(LUCAS, Th. d. N., p. 430)

§ 4 Congruentias de primo gradu

✻ 6. $a,b\varepsilon\mathrm{n} \,.\, m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\supset:$

·1 $b\varepsilon\, \mathrm{n} - \mathrm{nD}(a,m) \,.\supset.\, -\exists\, \mathrm{n}\cap x\ni(ax+b\ \varepsilon\ m\mathrm{n})$

·2 $b\varepsilon\, \mathrm{nD}(a,m) \,.\supset.\, \mathrm{n}\cap x\ni(ax+b\ \varepsilon\ \mathrm{n}m) =$
$\mathrm{n}\cap x\ni[(ax+b)/\mathrm{D}(a,m)\ \varepsilon\ \mathrm{n}m/\mathrm{D}(a,m)]$

·3 $b\varepsilon\, \mathrm{nD}(a,m) \,.\supset.\, \mathrm{Num}[0\cdots(m-1)\cap x\ni(ax+b\ \varepsilon\ m\mathrm{n})] = \mathrm{D}(a,m)$

·4 $\mathrm{D}(a,m)=1 \,.\supset.\, \mathrm{n}\cap x\ni(ax+b\ \varepsilon\ m\mathrm{n}) = -ba\upharpoonleft(\Psi m-1)+m\mathrm{n}$

·41 $p\varepsilon\mathrm{Np} \,.\, \mathrm{D}(a,p)=1 \,.\supset.\, \mathrm{n}\cap x\ni(ax+b\ \varepsilon\ \mathrm{n}p) = -ba^{p-2}+m\mathrm{n}$

In ce propositiones es methodo ut investiga solutione de congruentia de primo gradu. Secundum P ·4·41 metodo trahe origine ex theorema de Fermat (4·11) et de Eulero (4·1) aut ex propositione 5·4. Congruentia de primo gradu pote es resoluto cum methodo ut resolve aequatione indeterminato de primo grado, p. ex. cum auxilio de fractione continuo, ut fac LAGRANGE (Histoire de l'Ac. de Berlin, a. 1767, p. 175). Vide et GAUSS, Disq. Arith., art. 26-31, LEGENDRE, Essai, 2^e^ éd., § 11.

GAUSS (Disq. Arith., art. 31) scribe numeros que satisfac ad relatione $ax\ \varepsilon\ b+m\mathrm{n}$ sub forma $\frac{b}{a}$ (mod m). Ce expressione habe aut nullo aut uno aut plure valore incongruo (mod p). Hodie maximo parte de auctore non ute ce notatione de GAUSS.

✻ 7. $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, m \varepsilon\, \mathrm{N}_1\mathrm{F}1\cdots n \,.\, a \varepsilon\, (\mathrm{n}-\iota 0)\mathrm{F}1\cdots n \;.\!\supset\!:$

·1 $r,s\ \varepsilon\ 1\cdots n \,.\, r<s \;.\!\supset_{r,s}.\ \mathrm{D}(m_r,m_s)=1 \,:\, u=\Pi(m_r|1\cdots n) \,.$
$k \varepsilon\ \mathrm{nF}1\cdots n \,:\, r\varepsilon 1\cdots n \,.\!\supset_r.\, k_r\ \varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(xu/a_r\ \varepsilon\ 1+m_r\mathrm{n}) \,:\!\supset\!:$
$\mathrm{n}\frown x\ni(r\varepsilon\ 1\cdots n \;.\!\supset_r.\ x\varepsilon\ a_r+\mathrm{n}m_r) = \Sigma(a_r k_r u/m_r\,|\,r,1\cdots n)+\mathrm{n}u$

·2 $\exists\ \mathrm{n}\frown x\ni(r\varepsilon\ 1\cdots n \;.\!\supset_r.\ x\varepsilon\ a_r+m_r\mathrm{n}) \;.=:\ r,s\varepsilon 1\cdots n \;.\!\supset_{r,s}.$
$a_r-a_s\ \varepsilon\ \mathrm{nD}(m_r,m_s)$

·3 $n_1=\Pi\{x\uparrow \mathrm{mp}(x,m_1)|x,\ \mathrm{Np}\frown x\ni[r\varepsilon\ 2\cdots n \;.\!\supset_r.\mathrm{mp}(x,m_1)\geqq$
$\mathrm{mp}(x,a_r)]\} \,.\, r\varepsilon\ 2\cdots n \,.\, n_r=\Pi\{x\uparrow \mathrm{mp}(x,m_r)|x,\mathrm{Np}\frown x\ni[s\varepsilon\ 1\cdots n-\iota r \;.\!\supset_s.$
$\mathrm{mp}(x,m_r)>\mathrm{mp}(x,a_s)]\} \;.\!\supset\!:\ r,s\varepsilon\ 1\cdots n \,.\, r<s \;.\!\supset.\ \mathrm{D}(n_r,n_s)=1 \,.$
$\Pi(n_r|r,\ 1\cdots n) = \mathrm{mlt}(a_r|r,1\cdots n)$

·4 $\mathrm{Hp}\cdot 2\cdot 3 \;.\!\supset.\ \mathrm{n}\frown x\ni(r\varepsilon\ 1\cdots n \;.\!\supset_r.\ x\varepsilon\ a_r+\mathrm{n}m_r)=$
$=\mathrm{n}\frown x\ni(r\varepsilon 1\cdots n \;.\!\supset_r.\ x\varepsilon\ a_r+\mathrm{n}n_r)$

Ce propositiones, que constitue regulas de GAUSS (Disq. Arith. art. 32-36), es in antiquo libro de arithmetica de sinense Sun Tsze; v. K. D. BIERNATZKI, J. f. Math., t. 52, a. 1856, p. 59; MATTHIESSEN, ibidem, t. 91, 1881, p. 254. STIELTJES (Ann. de Toulouse, t. 4, 1890) tracta ce quaestione cum maximo claritate.

§5 Congruentias de secundo gradu

✻ 8. $a,b,c\varepsilon \mathrm{n} \,.\, p\varepsilon\ \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, \mathrm{D}(a,p)=1 \;.\!\supset\!:$

·1 $\mathrm{n}\frown x\ni(ax^2+bx+c\ \varepsilon\ \mathrm{n}p) = \mathrm{n}\frown x\ni[\exists\ \mathrm{n}\frown z\ni(z^2\ \varepsilon\ b^2-4ac+\mathrm{n}p) \,.$
$2ax+b\ \varepsilon\ z+\mathrm{n}p]$

{GAUSS, *Disqu. Arith.* art. 152}

·2 $a\uparrow[(p-1)/2]\ \varepsilon\ -1+\mathrm{n}p \;.\!\supset.\ -\exists\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+\mathrm{n}p)$

·3 $a\uparrow[(p-1)/2]\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}p \;.\!\supset.\ \exists\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+\mathrm{n}p)$

{·2·3 EULERO, *Opus. anal.* t. 1, a. 1773, p. 242, 268=*Comm. Arith. coll.* t. 2, p. 1, 13; GAUSS, *Disqu. Arith.* art. 106; LEGENDRE, *Essai*, 2e éd. n. 134}

·32 $a\uparrow[(p-1)/2]\varepsilon 1+\mathrm{n}p \;.\!\supset.\ \mathrm{Num}[1\cdots(p-1)\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+\mathrm{n}p)]=2$

·32 ———————————— $.\ k\varepsilon\ 1\cdots(p-1)\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+\mathrm{n}p) \;.\!\supset.$
$\iota k \cup \iota(p-k) = 1\cdots(p-1)\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+\mathrm{n}p)$

* 9. $p,q\,\varepsilon\,\mathrm{Np}-\iota 2\,.\,a,b\,\varepsilon\,\mathrm{n}\,.\supset:$

·0 $\mathrm{J}(a,p)=1\ .=.\ a\,\varepsilon\,(\mathrm{n}^2+\mathrm{n}p)-\mathrm{n}p$ Df

·01 $\mathrm{J}(a,p)=-1\ .=.\ a\,-\varepsilon\,\mathrm{n}^2+\mathrm{n}p$ Df

·02 $\mathrm{J}(a,p)=0\ .=.\ a\,\varepsilon\,\mathrm{n}p$ Df

·03 $\mathrm{J}(a,p)\,\varepsilon\,\{\iota 1\cup\iota(-1)\cup\iota 0\}\cap x\ni\{a\uparrow[(p-1)/2]\,\varepsilon\,x+\mathrm{n}p\}$ Dfp

{LEGENDRE (*Essai*, éd 2ᵉ, n. 155) indica residuo de $a\uparrow[(p-1)/2]$ (mod$p$) cum symbolo $\left(\dfrac{a}{p}\right)$, que hodie es communi ad omni auctore, sed apud LEGENDRE tali symbolo habe aut valore 1 aut valore —1, nam definitione ·03 es posteriore. Nos ute simbolo $\mathrm{J}(a,p)$, que es magis consentaneo ad notatione de Form.}

·1 $\mathrm{J}(1,p)=1$

·2 $\mathrm{J}(-1,p)=(-1)\uparrow[(p-1)/2]$

·21 $\mathrm{J}(-1,p)=1\ .=.\ p\,\varepsilon\,4\mathrm{N}_0+1\ :\ \mathrm{J}(-1,p)=-1\ .=.\ p\,\varepsilon\,4\mathrm{N}_0+3$

{Ce theorema es noto ad FERMAT, sed primo demonstratione pertine ad EULERO (*Opusc. Anal.* t. 1. p. 64, *Comm. Petrop.* n. 5, a. 1759, p. 5, et n. 18, a. 1774, p. 112 = Comm. Ar. coll. 1, p. 210, 477) Vide et GAUSS, Disqu. Arith., art. 108-111.}

·3 $\mathrm{J}(ab,p)=\mathrm{J}(a,p)\times\mathrm{J}(b,p)$

·4 $a\,\varepsilon\,b+\mathrm{n}p\ .\supset.\ \mathrm{J}(a,p)=\mathrm{J}(b,p)$

·5 $\mathrm{J}(2,p)=(-1)\uparrow[(p^2-1)/8]$

·51 $\mathrm{J}(2,p)=1\ .=.\ p\,\varepsilon\,(8\mathrm{N}_0+1)\cup(8\mathrm{N}_0+7):$
$\mathrm{J}(2,p)=-1\ .=.\ p\,\varepsilon\,(8\mathrm{N}_0+3)\cup(8\mathrm{N}_0+5)$

{·5·51 FERMAT novi ce theorema sed non trade demonstratione. (*Op. math.*, p. 168). EULERO fac conatu ut demonstra illo sed frusta. Primo demonstratione rigoroso pertine ad LAGRANGE (*Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin*, a. 1775. pag. 349, 351 = Oeuvres t. 3, p. 771. Vide et GAUSS, Disq. Arith. art. 112, 116, LEGENDRE, Essai, 2ᵉ éd. n. 148, 386; STIELTJES, Neuw Arch. t. 9, a. 1882, p. 193, Ann. d. Toulouse, t. 11 A, a. 1887, p. 5.

·6 $\mathrm{J}(3,p)=1\ .=.\ p\,\varepsilon(12\mathrm{N}_0+1\cup 12\mathrm{N}_0+11):$
$\mathrm{J}(3,p)=-1\ .=.\ p\,\varepsilon\,(12\mathrm{N}_0+5\cup 12\mathrm{N}_0+7)$

·7 $\mathrm{J}(5,p)=1.=.\ p\,\varepsilon\,(20\mathrm{N}_0+1\cup 20\mathrm{N}_0+9\cup 20\mathrm{N}_0+11\cup 20\mathrm{N}_0+19):$
$\mathrm{J}(5,p)=-1.=.\ p\,\varepsilon\,(20\mathrm{N}_0+3\cup 20\mathrm{N}_0+7\cup 20\mathrm{N}_0+13\cup 20\mathrm{N}_0+17)$

·8 $J(7,p) = 1 . =. p \varepsilon (28N_0+1 \cup 28N_0+3 \cup 28N_0+9 \cup 28N_0+19 \cup 28N_0+25 \cup 28N_0+27)$:
$J(7,p) = -1 . =. (28N_0+5 \cup 28N_0+11 \cup 28N_0+13 \cup 28N_0+15 \cup 28N_0+17 \cup 38N_0+23)$

{·6·7·8 Ce propositiones que es casu particuiari de « lege de reciprocitate de residuos quadratico » (10·4) es noto multo ante que demonstratione de ce theorema. P·6 circa residuo 3 es noto ad FERMAT (*Opera math.* t. 2, p. 857) sed EULERO primo demonstra illo et « eo magis es mirandum demostrationem propositionum ad residua +2 et —2 pertinentium, prorsus similibus artificiis innexas, semper ipsius sagacitatem fugisse » (GAUSS, *Disqu. Arith.* art. 120). LAGRANGE postea demonstra ce P et P·7·8 circa residuo 5 et 7, sed illo non investiga ultra (Mémoires de l'Ac. de Berlin 1775, p. 352):. Vide et BRICARD, *Sur le caractère quadratique du nombre* 3 etc., Nouv. Ann. s. 3ᵉ, t. 16, a. 1887, p. 546}.

✻ 10. $p,q \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 . a,b \varepsilon \mathrm{n} . \supset$:

·1 $a \varepsilon b + \mathrm{n}p . \supset . J(a,p) = (-1) \upharpoonright \Sigma[E(2ra/p) | r, 1 \cdots (p-1)/2]$
{LEGENDRE, *Essai*, 2ᵉ éd. nn 381, 382}

·2 $a \varepsilon 2N_0+1 - N_1 \times p . \supset . J(a,p) =$
$(-1) \upharpoonright \Sigma[E(ra/p) | r, 1 \cdots (p-1)/2]$
{LEGENDRE, *Essai*, 2ᵉ éd. nn. 383, 384}

·3 $J(q,p) = (-1) \upharpoonright \mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1)/2 \frown x \ni [\mathrm{rest}(xq,p) > p/2]\}$
« Lemma de Gauss » (Werke t 2, p, 3) - Ce P es extenso a P. GAZZANIGA in R. Istituto Veneto s. 6, 4², 1886, p. 1271.

·31 $J(q,p) = \mathrm{sgn} \Pi \{[xq/p - E(xq/p + /2)] | x, 1 \cdots (p-1)/2\}$

·32 $J(q,p) = \mathrm{sgn} \Pi \{[\sin(2xq\pi/p)/\sin(2x\pi/p)] | x, 1 \cdots (p-1)/2\}$
{EISENSTEIN, *J, f. Math*, t. 29, a. 1845, p. 177.}

·33 $J(q,p) =$
$\Pi \{\Pi[(h/p - k/q)(h/p + k/q - /2) | h, 1 \cdots (p-1)/2] | k, 1 \cdots (q-1)/2\}$

·34 $J(q,p) = \Pi \{\Pi[(h/p - k/q) | h, 1 \cdots (p-1)/2] | k, 1 \cdots (q-1)/2\}$
{KRONECHER, *Berlin. Ber.* t. 7, a. 1884, p. 519}

·4 $J(p,q) = (-1) \upharpoonright [(p-1)(q-1)/4] \times J(q,p)$
{Ce propositione es « lege de reciprocitate de residuos quadratico » EULERO inveni illo sed non demonstra :

« Existente s numero quocumque primo, dividantur tantum quadrata imparia

$$1,\ 9,\ 25,\ 49 \ldots$$

per divisorem $4s$, notenturque residua, quae omnia erunt formae $4q+1$, quorum quodvis littera a indicetur, reliquorum autem numerorum, formae $4q+1$, qui inter residua non occurrunt, quilibet littera A indicetur, quo facto si fuerit divisor numerus primus

formae	tum est
$4ns+a$	$+s$ residuum et $-s$ residuum
$4ns-a$	$+s$ residuum et $-s$ non-residuum
$4ns+A$	$+s$ non-residuum et $-s$ non-residuum
$4ns-A$	$+s$ non-residuum et $-s$ residuum ».

(Opusc. Anal., t. 1, a. 1772).

Primo demonstratione pertine ad LEGENDRE, sed non es rigoroso. GAUSS trade septem demonstratione de ce « theorema fundamentali » :

1°. demonstratione (Disqu. Arith. art. 131-151) es ducto cum methodo de inductione ex theorema

$$p \varepsilon 8\mathrm{N}_0+1 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Np} \frown 1\cdots(p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(p,x) = -1].$$

2°. demonstratione (Disqu. Arith. art. 262) es deducto ex theoria de formas quadratico;

4°. et 6.° (Werke, t. 2, p. 9 et 55) ex teoria de divisione de circulo;

7°. (Werke, t. 2, p. 234) ex theoria de congruentias de gradu superiore;

3°. et 5.° ex P 10·3 (lemma de GAUSS).

EISENSTEIN (J. f. Math, t. 28, a. 1844, p. 246) da demonstratione geometrico.

GENOCCHI (Mém. de l'Ac. de Belgique, t. 25, a. 1853 (1852), cap. 13; vide et Comptes Rendus de l'Ac. de Paris t. 90, a. 1880, p. 350; et J. f. Math, 1892) funda simplice demonstratione de lege de reciprocitate supra relatione

$$2\mathrm{E}(hq/p) = \Sigma\{[1+\mathrm{sgn}(h/p-k/q)] \mid k,\ 1\cdots(q-1)/2\},$$

$$2\mathrm{E}(hq/p+1/2) = \Sigma\{[1+\mathrm{sgn}(h/p+k/q-1/2)] \mid k,\ 1\cdots(q-1)/2\}$$

(Circa relationes analogo v. HACKS, Acta Math, t. 12, 1888, p. 109: BUSCHE, *Ueber eine Bereismethode in der Zahlentheorie*, Göttingen, 1883; STEIN, J. f. Math, t. 106, a. 1890, p. 337).

Circa alio simplice demonstratione v. Buniakowsky, Bull. St-Pét., t. 14, a. 1869, p. 432; — Zeller, Monatsberichte der Ber. Ak., a. 1872; — Zolotareff, Nouvelles Annales, s. 2, t. 11, a. 1872, p. 354; — Schering, Gött. Nachr. a. 1879, p. 217.

Kronecker publica vario articulo circa lege de reprocitate (V. Kronecker's Werke). Simplicissimo es demonstratione de ce auctore, posito supra P. 10·33·34 (Berl. Berichte, t. 7, a. 1884, p. 519).

Ad publicationes citato nos adde

Kronecker, Berl. Monatsber, a. 1880, p. 686, p. 854; — Sylvester, Comptes Rendus de l'Ac. de Paris, t. 90, a. 1880, p. 1053, 1104; t. 91, p. 154; — Thomae, Zeitsch. f. Math. v. Ph, t. 26, a. 1881, p. 134; — Stieltjes, Nieuw Arch. t. 9, a. 1882, p. 193; — Schering, Acta Math, t. 1, a. 1883, p. 153; — Kronecker, Berl. Ber., a. 1884, p. 519; J. f. Math., t. 96, a. 1884, p. 348; Berl. Ber., a. 1884, p. 645; J. f. Math., t. 97, a. 1884, p. 93; Berl. Ber. a. 1885, p. 383; — Gegenbauer, Wien Ber. t. 91, a. 1885, p. 11; t. 92, a. 1885, p. 876; — Schering, Berl. Ber., a. 1885, p. 113; — Kronecker, Berl. Ber., a. 1885, p. 117; — Kummer, J. f. Math., t. 100, a. 1886, p. 10; — Hermes, Hoppe Arch., t. 5, a. 1887, p. 190; — Lerch, Teixeira J., t. 8, a. 1887, p. 137; — Gegenbauer, Wien Ber. t. 97, a. 1888, p. 427; — Busche, J. f. Math., t. 103, a. 1888, p. 118; — Kronecker, J. f. Math., t. 104, a. 1889, p. 348; — Tafelmacher, Diss. Göttingen, a. 1889; — Lipschitz, C. R. de l'Ac. de Paris, t. 108, a. 1889, p. 489; — Mandl, Monatsber. f. Math., t. 1, a. 1890, p. 465; — Pépin, Acc. Pont. dei N. Lincei, t. 43, a. 1890, p. 192; — Franklin, Messenger of. Math,, t. 19, a. 1890, p. 176; — Fields, American J. t. 13, a. 1890, p. 189; — Busche J. f. Math., t. 106, a. 1890, p. 65; — Kronecker, J. f. Math., t. 106, a. 1890, p. 346; — Matrot, Assoc. Franç., Limoges XIX, a. 1890, p. 79; — Lucas, Assoc. Franç., Limoges XIX_1, a. 1890, p. 147; Mélanges math. et. astr., S. Pétersb. t. 7, 1891, p. 65; — Gegenbauer, Wien Ber, t. 100, a. 1891, p. 855; p. 1072; — Schmidt, J. f. Math., t. 111, a. 1893, p. 107; Gegenbauer, Wien Ber., t. 103, a. 1894, p. 285; — Bang, Nyt Tidss. for Math., t. 5 B., a. 1894, p. 92; — Busche,

Hamb. Mitt., t. 3, a. 1896, p. 233; — LANGE, Leipz. Ber., t. 48, a. 1896, p. 629; — LERCH, Bull. Int. Prague, 1896; — LANGE, Leipz. Ber., t. 49, a. 1897, p. 607; — STERNEK, Recueil math. de Moscou. (in russo), t. 20, a. 1898, p. 267; — PÉPIN, Acc. P. d. N. Lincei, t. 51, a. 1898, p. 123; — ALEXEJEVSKY, Charkow Ges. t. 6, 1898, p. 200 (in russo); PÉPIN, Mem. Acc. d. N. Lincei, t. 16, a. 1900, p. 229; — FISCHER, Monatsb., f. Math. t. 11, a. 1900, p. 176; — GAUSS, *Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische reste*, hrsg. von NETTO, (Ostwalds kl. N⁰ 122), Leipzig: W. Engelmann, a. 1901.

❋ 11. $a,b\varepsilon \mathrm{n} \,.\, m,n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1 \,.\supset:$

·0 $\mathrm{J}(a,m) = \Pi[\mathrm{J}(a,p) \mid p, \mathrm{Np} \frown m\,\mathrm{N}_1]$ Df

$\mathrm{J}(a,m)$ es appellato *symbolo de Jacobi.*

·01 $\mathrm{J}(a,-m) = \mathrm{J}(a,m)$ Df

·1 $\mathrm{J}(a\times b,m) = \mathrm{J}(a,m) \times \mathrm{J}(b,m)$

·2 $a\varepsilon\, b+\mathrm{n}p \,.\supset.\, \mathrm{J}(a,m) = \mathrm{J}(b,m)$

·3 $\mathrm{J}(1,m) = 1$

·4 $\mathrm{J}(-1,m) = (-1)\uparrow[(m-1)/2]$

·5 $\mathrm{J}(2,m) = (-1)\uparrow[(m^2-1)/8]$

·6 $a\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{J}(a,m) = \mathrm{sgn}\Pi\{[\mathrm{rest}(ra,m)-m] \mid r, 1\cdots(m-1)/2 \frown x\ni[\mathrm{rest}(xa,m)>m/2]\}$ Dfp

{Ita SCHERING et KRONECKER defini symbolo de JACOBI (Berl. Ber. a. 1876, p. 330)}

·7 $m\varepsilon\mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,m) =$
$\Pi\{[\sin(2ax\pi/m)/\sin(2x\pi/m)] \mid x, 1\cdots(\mathrm{mod}\,m-1)/2\}$ Dfp

·8 $m,n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1 \,.\supset.\, \mathrm{J}(m,n) =$
$\Pi\{\Pi[4\sin(h\pi/m+k\pi/n)\times$
$\sin(h\pi/m-k\pi/2) \mid h, 1\cdots(m-1)/2] \mid k, 1\cdots(n-1)/2\}$

·9 $m,n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1 \,.\supset.\, \mathrm{J}(m,n) = (-1)\uparrow[(m-1)(n-1)/4]\times\mathrm{J}(n,m)$.

{·9. Extensione de (P10·4) lege de reciprocitate. Ut pote determina valore de $\mathrm{J}(m,n)$ es regulas posito aut supra algorithmo de Euclide aut supra algorithmo de fractione continuo, v. GAUSS, Werke, t. 2, p. 61 et sequ.; EISENSTEIN, J. f. Math.,

t. 27, a. 1844, p. 317; LEBESGUE, J. de Math., t. 12, a. 1847, p. 497; ZELLER, Gött. Nach., a. 1879, p. 197; SCHERING, Gött. Nach., a. 1879, p. 217; GEGENBAUER, Wien Berich., a. 1880, p. 931, et a. 1881, p. 1089., KRONECKER, Berl. Ber., a. 1884, p. 530; HEINITZ, Diss. Gött., a. 1893}.

* 12. $p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, r,n \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(r,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(n,p) = -1 \,.\supset:$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(r+x,p) = 1]\} = \mathrm{E}[(p-2)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(r+x,p) = -1]\} = \mathrm{E}[(p+2)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = -1 \,.\, \mathrm{J}(r+x,p) = 1]\} = \mathrm{E}[(p-1)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = -1 \,.\, \mathrm{J}(r+x,p) = -1]\} = \mathrm{E}[(p-1)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(n+x,p) = 1]\} = \mathrm{E}[(p-1)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(n+x,p) = -1]\} = \mathrm{E}[(p-1)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = -1 \,.\, \mathrm{J}(n+x,p) = 1]\} = \mathrm{E}[(p+2)/4]$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = -1 \,.\, \mathrm{J}(n+x,p) = -1]\} = \mathrm{E}[(p-2)/4]$

v. meo scripto *Un metodo per la risoluzione*, etc. Napoli R. 1903, p. 154.

$p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\supset.\, \exists 1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(x+1,p) = -1$

$p \varepsilon \mathrm{Np} \frown \mathrm{N}_1 + 3 \,.\supset.\, \exists\, 1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = -1 \,.\, \mathrm{J}(x+1,p) = 1]$

———————— $.\supset.\, \exists\, 1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = \mathrm{J}(x+1,p) = -1]$

$p \varepsilon \mathrm{Np} \frown \mathrm{N}_1 + 5 \,.\supset.\, \exists\, 1 \cdots (p-1) \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = \mathrm{J}(x+1,\, p) = 1]$

* 13·1 $p \varepsilon \mathrm{Np} \frown 8\mathrm{N}_0 + 3 \,.\supset.$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (p-3)/4 \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1]\} = (p-3)/8$

·2 $p \varepsilon \mathrm{Np} \frown 8\mathrm{N}_0 + 7 \,.\supset.$

$\mathrm{Num}\{(p-3)/4 \cdots (p-3)/2 \frown x \ni [\mathrm{J}(x,p) = 1]\} = (p+1)/8$

{1·2 BRICARD, Intermédiaire des M., t. 3, a. 1896, p. 62; t. 6, a. 1902, p. 417}

* 14·1 $m \varepsilon 2\mathrm{N}_1 + 1 - \mathrm{N}_1 \times \mathrm{N}_1^2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n}^2 + \mathrm{n}m - \mathrm{n}m \,.$

$u \varepsilon \iota 1 \cup \iota(-1) \mathrm{F}\mathrm{Np} \,.\supset.$

$\mathrm{Num}\{1 \cdots (m-1) \frown \mathrm{n}^2 - a + \mathrm{n}m \frown x \ni [\, p \varepsilon \mathrm{Np} \frown m/\mathrm{N}_1 \,.\supset_p .$

$\mathrm{J}(x,p) = u_p\,]\} = \Pi\{\mathrm{E}[(p-u_p)/4] \,|\, p, \mathrm{Np} \frown m/\mathrm{N}_1\}$

{v. meo scripto *Applicazione della teoria* etc., Napoli R., a. 1904, p. 135}

* 15· $p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,p) = 1 \,.\supset:$

·1 $p \varepsilon 4\mathrm{N}_0 + 3 \,.\supset.\, a \uparrow [(p+1)/4] \;\varepsilon\; \mathrm{n} \frown x \ni (x^2 \varepsilon\, a + \mathrm{n}p)$

·2 $p \varepsilon 8\mathrm{N}_0+5 \,.\, a\uparrow[(p-1)/4] \,\varepsilon\, 1+\mathrm{n}p \,.\supset.$
$a\uparrow[(p+3)/8] \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a+\mathrm{n}p$

·3 ——— $.\, a\uparrow[(p-1)/4] \,\varepsilon\, -1+\mathrm{n}p \,.\supset.$
$2\uparrow[(p-1)/4]\; a\uparrow[(p+3)/8] \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon a+\mathrm{n}p)$

}·1·2·3 LEGENDRE, *Essai*, 2^e éd., n. 185{

·4 $p \varepsilon 8\mathrm{N}_0+5 \,.\supset.\, a\uparrow[(p+3)/8] \times \}a\uparrow[(p-1)/4]+3\{\uparrow[(p-1)/4]$
$\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon a+\mathrm{n}p)$

}TONELLI, Lincei R., a. 1892, 1^0 sem., p. 116{

✻ 16. $p \varepsilon \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, a,b \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,p)=1 \,.\, \mathrm{J}(b,p)=-1 \,.$
$m \varepsilon 2\mathrm{N}_0+1 \,.\, r,s \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p=2^s m+1 \,.\supset:$

·1 $u \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap x \ni (a^m b^{2mx} \varepsilon\, 1+\mathrm{n}p) \,.\supset.$
$b^{mu}\, a\uparrow[(m+1)/2] \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon a+\mathrm{n}p)$

·2 $k \varepsilon \mathrm{n} \cap x \ni [\mathrm{J}(x+1,p)=1 \,.\, \mathrm{J}(x-1,p)=-1] \,.\, r \varepsilon \mathrm{nFN}_0 \,.$
$r_0 \varepsilon\, k+a\uparrow(2^{s-2}m)+\mathrm{n}p \,.\, r_r \varepsilon\, k+a\uparrow(2^{s-r-2}m) \times$
$\Pi[r_h \uparrow(2^{s-r-h-1}m) | h, 1\cdots(r-1)]+\mathrm{n}p$
$.\supset.\, a\uparrow[(m+1)/2]\; \Pi[r_r \uparrow(2^r m) | r, 0\cdots(s-1)] \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a+\mathrm{n}p)$

}·1·2 TONELLI, Lincei R., a. 1892, 1^0 sem., p. 116{

·3 $p \varepsilon 4\mathrm{N}_0+1 \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a+\mathrm{n}p) \,.\supset.$
$kb\uparrow(2^{s-2}m) \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, -a+\mathrm{n}p)$

}TONELLI, Lincei R., a. 1892, 1^0 sem., p. 116{

✻ 17. $p \varepsilon \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, k,a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,p)=1 \,.\, \mathrm{J}(k^2-a,p)=-1 \,.\supset:$

·1 $\}[k+\surd(k^2-a)]\uparrow[(p+1)/2] + [k-\surd(k^2-a)]\uparrow[(p+1)/2\Pi]\{$
$\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a+\mathrm{n}p)$

·2 $\surd a \}(k+\surd a)\uparrow[(p-1)/2] - (k-\surd a)\uparrow[(p-1)/2]\{/2$
$\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a+\mathrm{n}p)$

}·1·2 v. meo scripto *Un metodo*, etc., Napoli R., a. 1903, p. 154{

·3 $2\Sigma\}a^r \Sigma[1\cdots(p-1)/2]^{2r-1} | r, 1\cdots(p-1)/2\{ \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \,\varepsilon\, a+\mathrm{n}p)$

}v. meo scripto *Formole*, etc., Napoli R. a. 1905, p. 13{

Propositiones de nn. 15, 16, 17 enuntia vario methodo ut resolve congruentia de secundo gradu cum modulo primo. GAUSS trade duo methodo ut inveni solutiones, altero (Disqu. Arith., art. 319-322), dicto methodo de *excludente*, exige cognitione de non residuo de plure numero, altero (Disqu. Arith. art. 327) nite in theoria de formas quadratico. Methodos ut

inveni numeros positivo, que non supera modulo et satisfac ad congruentia *(radices)*, exige plure conatu et methodo de excludente es in tali casu magis idoneo que omni alio. Ut inveni uno quolibet solutione suffice ute formulas de TONELLI (16·2), aut meo (17·1 vel 17·2), pro que conatus es pauco. Meo formula 17·3 monstra postea solutione de congruentia sine ullo conatu, sed illo es pauco utili in practica.

✻ 18 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p \varepsilon \mathrm{Np}{-}\iota 2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,p) = 1 \,.\, l \varepsilon \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a + \mathrm{n}p) \,.\supset:$

·1 $r \varepsilon\, [(l+\sqrt{a})^n - (l-\sqrt{a})^n]/(2\sqrt{a}) + \mathrm{n}p \,.$
$s \varepsilon [(l+\sqrt{a})^n + (l-\sqrt{a})^n]/2 + \mathrm{n}p \,.\supset.$
$\mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\, a + \mathrm{n}p^n) = \mathrm{n} \cap \}x \ni (rx \varepsilon\, s + \mathrm{n}p^n) \cup x \ni (rx\ \varepsilon\, -s + \mathrm{n}p^n)]$

}LEGENDRE, *Essai*, 2e éd. n. 187{

·2 $(l \upharpoonright p^{n-1}) a \upharpoonright [(p^n - 2p^{n-1} + 1)/2]\ \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon a + \mathrm{n}p^n)$

}TONELLI, Lincei R., a. 1893, 1° sem., p. 259{

✻ 19. $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p \varepsilon\ \mathrm{Np}{-}\iota 2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(a,p) = 1 \,.\supset:$

·1 $p \varepsilon\ 4\mathrm{N}_0 + 3 \,.\supset.\ a \upharpoonright [(p^n - p^{n-1} + 2)/4]\ \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\ a + \mathrm{n}p^n)$

·2 $p \varepsilon\ 8\mathrm{N}_0 + 5 \,.\supset.$
$\}a \upharpoonright [(p^n - p^{n-1} + 4)/8] \{ \} a \upharpoonright [(p-1)/4] + 3 \{ \upharpoonright [(p^n - p^{n-1})/4]\ \varepsilon$
$\mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon a + \mathrm{n}p^n)$

}·1·2 TONELLI, Lincei R., a. 1893, 1° sem., p. 259{

✻ 20. $\mathrm{Hp}19 \,.\, m \varepsilon\ 2\mathrm{N}_0 + 1 \,.\, r,s \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p = 2^s m + 1 \,.\supset:$

·1 $b \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(b,p) = -1 \,.\, u \varepsilon\ \mathrm{N}_1 \cap x \ni \}[a \upharpoonright (p^{n-1} m)] b \upharpoonright (2p^{n-1} m x)\ \varepsilon$
$1 + \mathrm{n}p^n \{ \,.\supset.\ [b \upharpoonright (p^{n-1} m u)] a \upharpoonright [(p^{n-1} m + 1)/2]\ \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\ a +$
$\mathrm{n}p^n)$

}TONELLI, Lincei R., a. 1892, 1° sem. p. 116{

·2 $k \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni [\mathrm{J}(x+1,p) = 1 \,.\, \mathrm{J}(x-1,p) = -1] \,.\, r \varepsilon \mathrm{nFN}_0 \,.$
$r_0 \varepsilon\ k + a \upharpoonright (2^{s-2} m) + \mathrm{n}p \,.\, r_r\ \varepsilon\ k + \mathrm{n}p + [a \upharpoonright (2^{s-r-2} m)] \times$
$\Pi[r_h \upharpoonright (2^{s-r-h-1} m) | h, 1 \cdots (r-1)] \,.\supset.\ \}a \upharpoonright [(p^{n-1} m + 1)/2] \{ \times$
$\Pi[r_r \upharpoonright (2^r p^{n-1} m) | r, 0 \cdots (s-1)]\ \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\ a + \mathrm{n}p^n)$

}TONELLI, Lincei R., a. 1893, 1° sem. p. 259{ .

·3 $k \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{J}(k^2 - a, p) = -1 \,.\supset.$
$\}a \upharpoonright [(p^n - 2p^{n-1} + 1)/2] \{ \} [k + \sqrt{(k^2 - a)}] \upharpoonright [p^{n-1}(p+1)/2] +$
$[k - \sqrt{(k^2 - a)}] \upharpoonright [p^{n-1}(p+1)/2] \{\ \varepsilon\ \mathrm{n} \cap x \ni (x^2 \varepsilon\ a + \mathrm{n}p^n)$

·4 Hp·3 $.\supset.\ \sqrt{a}\{(k+\sqrt{a})\upharpoonleft[p^{n-1}(p-1)/2]-(k-\sqrt{a})[p^{n-1}(p-1)/2]\}/2$
$\varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon a+\mathrm{n}p^n)$

{·3·4 v. meo scripto *Applicazione*, etc, Napoli R., a. 1904, p. 135}

✻ 21. $n\varepsilon\ \mathrm{N}_1+1\ .\ p\varepsilon\ \mathrm{Np}-\iota 2\ .\ k\varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}p^{n-1})\ .\supset:$

·1 $b\varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni[(k^2-a)/p^{n-1}+2kx\varepsilon\mathrm{n}p]\ .\supset.$
$a+bp^{n-1}\ \varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}p^n)$

✻ 22·1 $a\varepsilon\ 2\mathrm{n}+1\ .\supset:\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+2\mathrm{n})=2\mathrm{n}+1$

·2 $a\varepsilon\ 4\mathrm{n}+1\smile 4\mathrm{n}-1\ .\supset.\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+4\mathrm{n})=4\mathrm{n}+1\smile 4\mathrm{n}+3$

·3 $a\varepsilon\ 8\mathrm{n}+1\ .\supset.\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon a+8\mathrm{n})=8\mathrm{n}+1\smile 8\mathrm{n}+3\smile 8\mathrm{n}+5\smile 8\mathrm{n}+7$

·4 $r\varepsilon\mathrm{N}_0\ .\supset:\ \exists\ \mathrm{n}\frown x\varepsilon(x^2\varepsilon\ a+2^{r+3}\mathrm{n})\ .=.\ a\varepsilon\ 8\mathrm{n}+1$

·5 $r\varepsilon\mathrm{N}_0\ .\ a\varepsilon\ 8\mathrm{n}+1\ .\supset.\ \mathrm{Num}[1\cdots(2^{r+3}-1)\frown x\ni(x^2\varepsilon a+2^{r+3}\mathrm{n})]=4$

·6 Hp·5 $.\ u\varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+2^{r+3}\mathrm{n})\ .\supset.\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon a+2^{r+3}\mathrm{n})=$
$(u+2^{r+2}\mathrm{n})\smile(-u+2^{r+2}\mathrm{n})$

{·6 v. GAUSS Disqu. Arith. art. 103; LEGENDRE, *Essai*, 2e éd. n. 189}

·7 $a\ \varepsilon\ 8\mathrm{n}+1\ .\ m\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1\ .\ s=\mathrm{mp}(2,a-1)\ .\supset.$
$1+(a-1)/2\Sigma\{\mathrm{C}(2r,r)[(1-a)/4]^r/(r+1)|r,0\cdots\mathrm{E}[(m-2)/(s-2)-1]\}$
$\varepsilon\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\ \varepsilon\ a+2^m\mathrm{n})$

{·7 Ce formula pertine ad LEGENDRE (*Essai*, 2e éd. nn. 350-2); circa demonstratione rigoroso de illo v. meo scripto: *Estensione di un metodo di Legendre*, etc., Napoli R., 1905.}

✻ 23. $m\varepsilon\mathrm{N}_1\ .\ a\varepsilon\mathrm{n}\ .\ \mathrm{D}(a,m)=1\ .\supset:$

·1 $m\varepsilon\ 2\mathrm{N}_0+1\smile 2(2\mathrm{N}_0+1)\ .\supset:\ \exists\ \mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}m)\ .=.$
$p\varepsilon\mathrm{N}p-\iota 2\frown m/\mathrm{N}_1\ .\supset_p.\ \mathrm{J}(a,p)=1$

·11 Hp·1 $.\supset.\ \mathrm{Num}[1\cdots(m-1)\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}m)]=$
$2\upharpoonleft\mathrm{Num}(\mathrm{Np}-\iota 2\frown m/\mathrm{N}_1)$

·2 $m\varepsilon\ 4(2\mathrm{N}_0+1)\ .\supset:\ \exists\mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}m)\ .=:a\varepsilon 2\mathrm{n}+1:$
$p\varepsilon\mathrm{Np}-\iota 2\frown m/\mathrm{N}_1\ .\supset_p.\ \mathrm{J}(a,p)=1$

·21 Hp·2 $.\supset.\ \mathrm{Num}[1\cdots(m-1)\frown x\varepsilon(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}m)]=$
$2\upharpoonleft[1+\mathrm{Num}(\mathrm{Np}-\iota 2\frown m/\mathrm{N}_1)]$

·3 $m\varepsilon 8\mathrm{N}_1\ .\supset:\ \exists\mathrm{n}\frown x\ni(x^2\varepsilon\ a+\mathrm{n}m)\ .=.\ a\varepsilon\ 8\mathrm{n}+1:$
$p\varepsilon\mathrm{Np}-\iota 2\frown m/\mathrm{N}_1\ .\supset_p.\ \mathrm{J}(a,p)=1$

·31 $Hp·3 .\supset. Num[1\cdots(m-1)\frown x\ni(x^2\varepsilon a+nm)] = 2\uparrow[2+Num(Np-\iota 2\frown m/N_1)]$

24. $m\varepsilon 2N_1+1 . a\varepsilon n^2+nm-nm . k\varepsilon n . n\varepsilon N_0 . u,v\varepsilon nFN_0$
$u_n = \{[k+\sqrt{(k^2-a)}]^n - [k-\sqrt{(k^2-a)}]^n\}/[2\sqrt{(k^2-a)}]$
$v_n = [k+\sqrt{(k^2-a)}]^n + [k+\sqrt{(k^2-a)}]^n$

·1 $m-\varepsilon 3N_1 . k\varepsilon n\frown x\ni\{p\varepsilon Np\frown m/N_1 .\supset_p. J(x^2-a,p) = (-1)\uparrow[(p+1)/2]\}$
$r = mlt\{[p\uparrow(max(p,a)-1)][p-(-1)\uparrow[p+1)/2]] | p, Np\frown a/N_1\}$
$.\supset. a\uparrow[(\Phi m - r+1)/2]v_r/2 \varepsilon n\frown x\ni(x^2\varepsilon a+nm)$

·2 $k\varepsilon n\frown x\ni(p\varepsilon Np\frown a/N_1\frown 4N_0+3 .\supset_p. x^2-a \varepsilon np)\frown x\ni(p\varepsilon Np\frown a/N_1\frown 4N_0+1 .\supset_p. J(x^2-a,p) = -1]$.
$m_1 = mlt\{p\uparrow[max(p,a)-1] | p, Np\frown a/N_1\frown 4N_0+3\}$.
$m_2 = mlt\{(p+1)/2\, p\uparrow[max(p,a)-1] | p, Np\frown a/N_1\frown 4N_0+1\}$.
$r = mlt(m_1,m_2) .\supset. a\uparrow[(\Phi m-r+1)/2]v_r/2 \varepsilon n\frown x\ni(x^2\varepsilon a+nm)$

{·1·2 v. meo scripto *Applicazione*, etc. Napoli R., a. 1904, p. 135}

§ 6 Congruentias binomio

25. $a,m,n\varepsilon N_1 .\supset.$

·1 $n\frown x\ni(x^m\varepsilon 1+na . x^n\varepsilon 1+na) = n\frown x\ni[x\uparrow D(m,n) \varepsilon 1+na]$

·2 $n\frown x\ni(x^n \varepsilon 1+na) = n\frown x\ni[x\uparrow D(n,\Psi a) \varepsilon 1+na]$

26. $n\varepsilon N_1 . p\varepsilon Np-\iota 2 .\supset:$

·1 $n\frown x\ni(x^n\varepsilon 1+np) = n\frown x\ni[x\uparrow D(n,p-1) \varepsilon 1+np]$

·2 $Num[(1\cdots(p-1)\frown x\ni(x^n\varepsilon 1+np)] = D(n,p-1)$

{Gauss, Disqu. Arith. art. 60 et sequentes; Legendre, *Essai* etc., 2e éd., n. 334}

·3 $k\varepsilon n-np .\supset. k\uparrow[(p-1)/D(n,p-1)] \varepsilon n\frown x\ni(x^n \varepsilon 1+np)$

{Legendre, *Essai* etc., 2e éd. n. 336}

·4 $n\varepsilon N_1\frown(p-1)/N_1 . u\varepsilon n . n=min[N_1\frown x\ni(u^x \varepsilon 1+np)] .\supset. n\frown x\ni(x^n \varepsilon 1+np) = (u^r+np)|r, 1\cdots n$

{Gauss, Disqu. Arith., art. 65,1°; Legendre, *Essai* etc., 2e éd., n. 336, 3°.}

❋ 27. $m,n\varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, p\varepsilon \mathrm{Np}-\iota 2 \;.\supset:$

·1 $\mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon 1+\mathrm{n}p^m) = \mathrm{n}\cap x\ni\{x\upharpoonright \mathrm{D}[n,p^{m-1}(p-1)]\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m\}$

·2 $n\varepsilon\ \mathrm{N}_1\cap p^{m-1}(p-1)\,\mathrm{N}_1 \;.\supset.\; \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m) =$
$\{x+yp\upharpoonright[m-\mathrm{mp}(p,n)] + \mathrm{n}p^m\}\,|\,x,1\cdots(p^m-1)\cap x\ni[x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m \,.$
$\exists z\ni(z^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p \,.\, x\varepsilon\ z+\mathrm{n}p)].y,0\cdots[p\upharpoonright\mathrm{mp}(p,n)-1]$

·3 $\mathrm{Num}[1\cdots(p^m-1)\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m)] = D[n,p^{m-1}(p-1)]$

{·2·3 Gauss, Disqu. Arith. n. 85}

·4 $a\varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^{m-1}) \,.\, r=\mathrm{mp}(p,n) \;.\supset:$
$r<n-1 \,.\, h\varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni[(a^n-1)/p^{m-1}+xa^{n-1}n/p^r\ \varepsilon\ \mathrm{n}p)] \;.\supset.$
$a+hp^{n-r-1}\ \varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m)$

·5 $a\varepsilon\ n\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^{m-1}) \,.\, \mathrm{mp}(p,n) = n-1 \;.\supset.$
$\mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+np^m) = \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p)$

{·4·5 Gauss, Disqu. Arith., art. 88}

·6 $a\varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p) \;.\supset.\; a\upharpoonright p^{m-1}\ \varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+\mathrm{n}p^m)$

{Amici, *Sulla risoluzione* etc.. Rend. d. Circolo M. di Palermo, t. 11, a. 1897, p. 44}

Plure propositione de nn. 25, 26, 27 et sequentes pertine ad Eulero, v. Comm. Nov. Petrop. t. 7, p. 49; t. 18. p. 85 et Opusc. Analytica, t. 1.

❋ 28. $n,m\varepsilon\mathrm{N}_1 \;.\supset:$

·1 $\mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ 1+2^m\mathrm{n}) = \mathrm{n}\cap x\ni[x\upharpoonright\mathrm{D}(n,\Psi 2^m)\ \varepsilon\ 1+2^m\mathrm{n}]$

·2 $m\varepsilon\mathrm{N}_1+2 \,.\, n\varepsilon\ 1\cdots(m-2) \;.\supset.$
$\mathrm{Num}[1\cdots(2^n-1)\cap x\ni(x\upharpoonright 2^n\varepsilon 1+\mathrm{n}2^m)] = 2^{n-1}$

·3 $\mathrm{Hp}\cdot 2 \;.\supset.\; 1\cdots(2^n-1)\cap x\ni(x\upharpoonright 2^n\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}2^m) =$
$1+2^{m-2}\times[0\cdots(2^n-1)] \cup -1+2^{m-n}\times(1\cdots 2^n)$

❋ 29. $p\varepsilon\ \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, a\varepsilon\ \mathrm{n}-\mathrm{n}p \;.\supset:$

·1 $\exists\ \mathrm{n}\cap x\ni(x^n\varepsilon\ a+\mathrm{n}p) \;.=.\; a\upharpoonright[(p-1)/\mathrm{D}(n,p-1)]\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}p$

·2 $\mathrm{Hp}\cdot 1 \;.\supset.\; \mathrm{Num}[1\cdots(p-1)\cap x\ni(x^n\varepsilon a+\mathrm{n}p)] = \mathrm{D}(n,p-1)$

{Gauss, Disqu, Arith., art. 60 et sequ.; Legendre, *Essai* etc., 2ᵉ éd., n. 334}

·3 $r\varepsilon\ \mathrm{N}_1\cap x\ni[nx/\mathrm{D}(n,p-1)\ \varepsilon\ 1+\mathrm{n}(p-1)/\mathrm{D}(n,p-1)] \;.\supset.$
$\mathrm{n}\cap x\varepsilon(x^n\varepsilon\ a+\mathrm{n}p) = \mathrm{n}\cap x\ni[x\upharpoonright\mathrm{D}(n,p-1)\ \varepsilon\ a^r+\mathrm{n}p]$

Gauss indica cum $\sqrt[n]{a}$ (mod$p$) numeros que satisfac ad congruentia $x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p$. Ce espressione habe aut nullo aut uno aut plure valore incongruo (mod. p). Hodie nullo auctore ute ce notatione.

·4 $u \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \min[\mathrm{N}_1 \cap x\ni(u^x \varepsilon 1+\mathrm{n}p)] = n \,.\, k \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p) \,.\supset.$
$\mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p) = (ku^r+\mathrm{n}p)|r,1\cdots n$

{Gauss, Disqu. Arith., art. 65,1^0.}

·5 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap (p-1)/\mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}[n,(p-1)/n] = 1 \,.\, a\uparrow[(p-1)/n] \varepsilon 1+\mathrm{n}p \,.$
$r \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap x\ni[nx \varepsilon 1+\mathrm{n}(p-1)/n] \,.\supset.\, a^r \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p)$

{Gauss, Disqu. Arith., art. 67.}

Circa conatus ut inveni solutiones de congruentia $x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p$, ubi $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap (p-1)/\mathrm{N}_1$, v. Gauss, D. A. art. 67. 68. Legendre. E. 2^e éd. p. 354 (n. 342), p. 355, (n. 346).

·6 $\exists\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^n+1 \,\varepsilon\, \mathrm{n}p) \,.=.\, (p-1)/\mathrm{D}(n,p-1) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1$

·7 $\mathrm{n} \cap x\ni(x^n+1 \varepsilon \mathrm{n}p) = \mathrm{n} \cap x\ni[x\uparrow\mathrm{D}(n,p-1)+1 \,\varepsilon\, \mathrm{n}p]$

✻ 30. $p \varepsilon \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n}-\mathrm{n}p \,.\supset.$

·1 $\exists\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) \,.=.\, a\uparrow[\Phi p^m/\mathrm{D}(n,\Phi p^m)] \,\varepsilon\, 1+\mathrm{n}p^m$

·2 $r \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap x\ni[nx/\mathrm{D}(n,\Phi p^m) \,\varepsilon\, 1+\Phi p^m/\mathrm{D}(n,\Phi p^m)] \,.\supset.$
$\mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) = \mathrm{n} \cap x\ni[x\uparrow\mathrm{D}(n,\Phi p^m) \,\varepsilon\, a^r+\mathrm{n}p^m]$

·3 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap \Phi p^m/\mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) \,.=.$
$a\uparrow\{[(p-1)p\uparrow\mathrm{mp}(p,n)]/n\} \,\varepsilon\, 1+\mathrm{n}p\uparrow[\mathrm{mp}(p,n)+1]$

·4 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap \Phi p^m/\mathrm{N}_1 \,.\, \exists\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) \,.\supset.$
$\mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) = \{x+yp\uparrow[m-\mathrm{mp}(p,n)]+\mathrm{n}p^m\}|(x,1\cdots(p^m-1)$
$\cap x\ni[x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m \,.\, \exists\, z\ni(z^n \varepsilon a+\mathrm{n}p \,.\, x \varepsilon z+\mathrm{n}p)], y, 0\cdots[p\uparrow\mathrm{mp}(p,n)-1]$

·5 $\mathrm{Hp}·4 \,.\supset.\, \mathrm{Num}[1\cdots(p^m-1) \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m)] = \mathrm{D}(n,\Phi p^m)$

·6 $\mathrm{Hp}·4 \,.\, k \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^{m-1}) \,.\, r=\mathrm{mp}(p,n) \,.\supset:$
$r<m-1 \,.\, h \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni[(k^n-a)/p^{m-1} + xk^{n-1}n/p^r \,\varepsilon\, \mathrm{n}p] \,.\supset.$
$k+hp^{m-r-1} \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^m \varepsilon a+\mathrm{n}p^m)$

·7 $\mathrm{Hp}·4 \,.\, k \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^{m-1}) \,.\, \mathrm{mp}(p,n) = m-1 \,.\supset.$
$\mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m) = \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p)$

·8 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \cap (p-1)/\mathrm{N}_1 \,.\, k \varepsilon \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p) \,.\supset.$
$\{a\uparrow[(p^m-2p^{m-1}+1)/n]\}\{k\uparrow p^{m-1}\} \,\varepsilon\, \mathrm{n} \cap x\ni(x^n \varepsilon a+\mathrm{n}p^m)$

{v. meo scripto, *Applicazione* etc., Napoli R., 1904. n. 7, nota}

✻ 31. $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon 2\mathrm{n}+1 \;.\supset:$

·1 $\exists\, \mathrm{n} \frown x \ni (x^n \varepsilon\, a+\mathrm{n}2^m) \;.=.\; a \uparrow [\Psi 2^m / \mathrm{D}(n,\Psi 2^m)] \;\varepsilon\; 1+\mathrm{n}2^m$

·2 $r \varepsilon\, \mathrm{N}_0 \frown x \ni [nx \varepsilon\, \mathrm{D}(n,\Psi 2^m)+\mathrm{n}\Psi 2^m] \;.\supset.$
$\mathrm{n} \frown x \ni (x^n \varepsilon\, a+2^m\mathrm{n}) = \mathrm{n} \frown x \ni [x \uparrow \mathrm{D}(n,\Psi 2^m) \;\varepsilon\; a^r+2^m\mathrm{n}]$

·3 $n \varepsilon 2\mathrm{N}_0+1 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1+1 \,.\, k \varepsilon\, \mathrm{N}_0 \frown x \ni (2^{m-2}x \;\varepsilon\; -1+n\mathrm{n}) \;.\supset.$
$a \uparrow [(2^{m-2}k+1)/n] \;\varepsilon\; \mathrm{n} \frown x \ni (x^n \varepsilon\, a+2^m\mathrm{n})$

{AMICI, *Sulla risoluzione*, etc., Rend. d. Circolo M. di Palermo, t. 11, a. 1897, p. 46}

·4 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, m \varepsilon\, \mathrm{N}_0+n+2 \;.\supset.\; \exists\, \mathrm{n} \frown x \ni (x \uparrow 2^n \;\varepsilon\; a+2^m\mathrm{n}) \;.=.$
$a \varepsilon 1+2^{n+2}\mathrm{n}$

{AMICI, *Risoluzione*, etc., Rend. d. Circolo M. di Palermo, t. 8, a. 1894, p. 198}

·5 $\mathrm{Hp}\cdot 4 \,.\, a \varepsilon\, 1+2^{n+2}\mathrm{n} \,.\, s = \mathrm{mp}(2,a-1) \;.\supset.$
$(a+2^n-1)\,2^n - \Sigma\{[(1-a)/2^n]^r\, r!\, \Pi[2^n x-1 | x,1\cdots(r-1)] | r,$
$2\cdots \mathrm{E}[(m-2)(s-n-1)]\} \;\varepsilon\; \mathrm{n} \frown x \ni (x \uparrow 2^n \;\varepsilon\; a+2^m\mathrm{n})$

{Vide meo scripto: *Estensione* etc., Napoli R., 1905}

6· $\mathrm{Hp}\cdot 4 \,.\, a \varepsilon\, 1+2^{n+2}\mathrm{n} \;.\supset.$
$\mathrm{Num}[1\cdots(2^m-1) \frown x \ni (x \uparrow 2^n \;\varepsilon\; a+2^m\mathrm{n})] = 2^{n+1}$

{AMICI, *Risoluzione*, etc., Rend. d. Circolo di Palermo, t. 8, a. 1894, p. 198}

·7 $\mathrm{Hp}\cdot 6 \,.\, r \varepsilon\, \mathrm{n} \frown x \ni (x \uparrow 2^n \;\varepsilon\; a+2^m\mathrm{n}) \;.\supset.$
$\mathrm{n} \frown x \ni (x \uparrow 2^n \;\varepsilon\; a+2^m\mathrm{n}) = (r+2^{m-n}\mathrm{n}) \cup (-r+2^{m-n}\mathrm{n})$

§7. Theoria de gaussiano. Radices primitivo. Indices

✻ 32. $a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(a,m)=1 \;.\supset.$

·0 $\mathrm{gss}(m,n) = \min[\mathrm{N}_1 \frown x \ni (a^x \varepsilon\, 1+\mathrm{n}m)]$ Df gss

gss (m,n) = gaussiano de m in basi n. Vocabulo « gaussiano » es introducto a LUCAS, sed ce auctore appella tali numero « gaussiano de n secundum modulo m » (Théor. d. Nombres, 1901, p. 439) GAUSS appella illo « exponente ad que n

pertine ». Circa omni theoria de gaussiano v. meo articulo, *Sui numeri composti*, etc., Ann. di Mat. (s. 3ª, t. 9, a. 1903, p. 139).

·1 $\mathrm{N}_0 \cap x \ni (a^x \, \varepsilon \, 1+\mathrm{n}m) = \mathrm{N}_0 \times \mathrm{gss}(m,a)$

·2 $r,s \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset :\, a^r \varepsilon \, a^s+\mathrm{n}m \,.=.\, r \varepsilon \, s+\mathrm{n}\times \mathrm{gss}(m,a)$

* 33. $a \varepsilon 4\mathrm{n}+3-\iota(-1) \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, n=\mathrm{mp}(2,a+1) \,.\supset:$

·1 $\mathrm{gss}(2,a) =1$

·2 $m \varepsilon \, 2\cdots(n+1) \,.\supset.\, \mathrm{gss}(2^m,a) =2$

·3 $m>n \,.\supset.\, \mathrm{gss}(2^m,a) = 2^{m-n}$

* 34. $a \varepsilon \, 4\mathrm{n}+1-\iota 1 \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, n=\mathrm{mp}(2,a-1)$

·1 $m \leqq n \,.\supset.\, \mathrm{gss}(2^m,a) =1$

·2 $m \geqq n \,.\supset.\, \mathrm{gss}(2^m,a) =2^{m-n}$

* 35. $p \varepsilon \, \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, a,b \varepsilon \, \mathrm{n}-\mathrm{n}p \,.\supset:$

·1 $\mathrm{gss}(p,a) \, \varepsilon \, \mathrm{N}_1 \cap (p-1)/\mathrm{N}_1$

{FERMAT, a.1640, Oeuvres, t. 2, p. 209}

·2 $\mathrm{Num}[1\cdots(p-1) \cap x \ni (a^x \, \varepsilon \, b+\mathrm{n}p)] = (p-1) \, \mathrm{gss}(p,a)$

·3 $k,l \varepsilon \mathrm{N}_0 \cap x \ni (a^x \, \varepsilon \, b+\mathrm{n}p) \,.\supset:\, k \varepsilon \, l+\mathrm{n}\times \mathrm{gss}(p,a)$

Ce P es in Form 1902 (§Np·10·1) sub forma pauco diverso.

* 36. $p \varepsilon \, \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n}-\mathrm{n}p \,.\, n=\mathrm{mp}[p, a \uparrow \mathrm{gss}(p,a)-1] \,.\, m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset:$

·1 $m \leqq n \,.\supset.\, \mathrm{gss}(p^m,a) = \mathrm{gss}(p,a)$

·2 $m \geqq n \,.\supset.\, \mathrm{gss}(p^m,a) = p^{m-n} \mathrm{gss}(p,a)$

·3 $\mathrm{gss}(p^m,a) \, \varepsilon \, \mathrm{N}_1 \cap p^{m-1}(p-1) \, \mathrm{N}_1$

* 37. $a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(m,n) = \mathrm{D}(a,m) = \mathrm{D}(a,n) =1 \,.\supset.$

·1 $\mathrm{gss}(mn,a) = \mathrm{mlt}[\mathrm{gss}(m,a) \,,\, \mathrm{gss}(n,a)]$

·2 $\mathrm{gss}(m,a) = \mathrm{mlt}\{\mathrm{gss}(x,a) | x, (\mathrm{Np} \uparrow \mathrm{N}_1) \cap m/\mathrm{N}_1\}$

·3 $\mathrm{gss}(m,a) \, \varepsilon \, \mathrm{N}_1 \cap \Psi m / \mathrm{N}_1$

✻ 38. $p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2$

·0 $\mathrm{Rpr}\, p = \mathrm{n} \cap x \ni [\mathrm{gss}(p,x) = p-1]$ Df Rpr

$\mathrm{Rpr}\, p =$ *radice primitivo de p*, es numero que pertine ad exponente $p-1$, secundum modulo p. Ce denominatione es introducto ab EULERO.

·1 $\mathrm{Num}\, [1 \cdots (p-1) \cap \mathrm{Rpr}\, p] = \Phi(p-1)$

EULERO primo demonstra existe radice primitivo de p, sed suo demonstratione habe aliquo mendo (Comm. n. Ac. Petrop. t. 18, p. 85. Primo demonstratione completo pertine ad GAUSS (Disqu. Arith., art. 55).

·2 $\mathrm{Rpr}\, p = \mathrm{n} \cap x \ni \{ a \varepsilon \mathrm{Np} \cap (p-1)/\mathrm{N}_1 \,.\supset_a.\, x \uparrow [(p-1)/a] - 1 \varepsilon - \mathrm{n}p \}$

·3 $\mathrm{Rpr}\, p = \mathrm{n} \cap x \ni [a \varepsilon \mathrm{Np} \cap (p-1)/\mathrm{N}_1 \,.\supset_a.\, -\exists\, y \ni (y^a \varepsilon\, x + \mathrm{n}p)]$

·4 $a \varepsilon\, \mathrm{n} - \mathrm{n}p \,.\, \mathrm{gss}(p,a) < p-1 \,.\, b \varepsilon \mathrm{n} - \mathrm{n}p \cap x \ni [x \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset_x.$
$a^x - \varepsilon\, x + \mathrm{n}p] \,.\supset:\, m \varepsilon\, \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{gss}(p,a)/\mathrm{N}_1 \,.\, n \varepsilon\, \mathrm{N}_1 \cap \mathrm{gss}(p,b)/\mathrm{N}_1 \,.$
$\mathrm{D}(m,n) = 1 \,.\, \mathrm{mlt}[\mathrm{gss}(p,a), \mathrm{gss}(p,b)] = mn \,.\supset.$
$\{a \uparrow [\mathrm{gss}(p,a)/m]\}\{b \uparrow [\mathrm{gss}(p,b)/n]\} \varepsilon\, \mathrm{n} \cap x \ni [\mathrm{gss}(p,x) > \mathrm{gss}(p,a)]$

In generali oporte conatu ut inveni uno radice primitivo de p, et EULERO puta es difficili inveni tali numero (Opusc. Analyt., t. 1, p. 152). In aliquo casu applicatione de P·2·3 es utile.

Ex P·4 GAUSS trahe methodo ut inveni uno radice primitivo de p (Disqu. Arith., n. 73). Circa alio methodo v. OLTRAMARE, J. f. Math. t. 49, a.1855, p. 161; FROLOV, Bull. Soc. math. de France t. 21, a.1893, p. 113; t. 22, a.1894, p. 211.

·5 $p \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 3 \,.\supset.\, \Pi [1 \cdots (p-1) \cap \mathrm{Rpr}\, p] \varepsilon\, 1 + \mathrm{N}_0 p$

·6 $p - 1 \varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (\mathrm{N}_1 + 1)^2 \,.\supset.\, \Sigma [1 \cdots (p-1) \cap \mathrm{Rpr}\, p] \varepsilon\, \mathrm{n}p$

·7 $p - 1 - \varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (\mathrm{N}_1 + 1)^2 \,.\supset.\, \Sigma [1 \cdots (p-1) \cap \mathrm{Rpr}\, p] \varepsilon$
$(-1) \uparrow \mathrm{Num}[\mathrm{Np} \cap (p-1)/\mathrm{N}_1] + \mathrm{n}p$

{·5·6·7 GAUSS, Disqu. Arith. art. 80, 81 v. et ARNDT, J. f. Math. t. 31, a.1846, p. 326; HOFMANN, Math. Ann. t, 20, a.1882, p. 471}

✻ 39·0 $a \varepsilon\, \mathrm{n} - \mathrm{n}p \,.\, u \varepsilon\, \mathrm{Cls}'\mathrm{Np} \,.\supset:$
$a \varepsilon \mathrm{Rpr}\, u \,.=:\, x \varepsilon u \,.\supset_x.\, a \varepsilon \mathrm{Rpr}\, x$ Df

·1 $3,5,6,10 \varepsilon$ Rpr{Np⌢[2↑(2↑N_1)+1]}

·2 2ε Rpr[Np⌢2(Np⌢4N_0+1)+1]

·3 -2ε Rpr[Np⌢2(Np⌢4N_0+3)+1]

·4 2ε Rpr[Np⌢4Np+1]

{·1···4, v. TCHEBYCHEF, Teoria delle congruenze (trad. MASSARINI) pp. 209-213}

·5 $m\varepsilon N_1+1$.⊃. 3εRpr{Np⌢2^m[Np⌢N_1+(9↑2^{m-2}—1)2^{m-1}]+1}

{Ce P es in theoria de congruentias de TCHEBYCHEF (trad. MASSARINI, p. 212) sub forma minus utile. In ce forma es in « *Elém. de la th. des nombres, par* E. CAHEN, p. 398}

Existe tabulas de radice primitivo, v.

TCHEBYCHEF, *Teoria delle congruenze* (*trad.* MASSARINI). *Tavola delle radici primitive dei numeri primi da* 3 *a* 353. (pp. 248-287).

WERTHEIM, *Primitive Wurzeln des Primzahlen* 2^nq+1, bei *Welchen* q=1, *oder gleich einer ungeraden Primzahl ist:* Zeitsch. f. Math., t. 25, a.1894, pp. 81-97; — *Tabelle der kleinsten primitiven* Wurzeln g *aller ungeraden Primzahlen* p *unter* 3000, Acta Math., t. 17, a.1893, pp. 315-320; — *Primitive* Wur*zeln der Primzahlen von der Form* $2^\pi q^\lambda$+1 *in welcher* q=1 *oder eine ungerade Primzahl ist. Tabelle der kleinsten primitiven* Wurzeln g *aller Primzahlen* p *zwischen* 3000 *und* 10000, Acta Math., t. 20, a.1896, pp. 143-157; — Berichtigungen zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln unter 10000 (Acta Math., t. 22, 1898).

✱ 40. $p\varepsilon$ Np-t2 . $a\varepsilon$ Rpr$p$. $b,c\varepsilon$ n-np.⊃:

·0 ^{a}Ind(b,p) = min[N_0⌢x з($a^x \varepsilon$ b+np)]

^{a}Ind(b,p) = indice de b in basi a, secundum modulo p. Ce denominatione et symbolo « Ind » es introducto a GAUSS (Disqu Arit. art. 57). Theoria de Indice es analogo ad theoria de logarithmo.

·1 ^{a}Ind(b,p) ε 0···(p—2)

·2 $k\varepsilon$ n⌢xз($a^x\varepsilon b$+np) .⊃. $k\varepsilon$ ^{a}Ind(b,p)+n(p—1)

·3 ^{a}Ind$(1,p)$=0

·4 $''\mathrm{Ind}(a,p)=1$

·5 $b\varepsilon\, c+\mathrm{n}p \;.\supset.\; ''\mathrm{Ind}(b,p)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(c,p)+\mathrm{n}(p-1)$

·6 $''\mathrm{Ind}(bc,p)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(b,p)+''\mathrm{Ind}(c,p)+\mathrm{n}(p-1)$

·7 $m\varepsilon \mathrm{N}_1 \;.\supset.\; ''\mathrm{Ind}(b^m,p)\ \varepsilon\ m\times''\mathrm{Ind}(b,p)+\mathrm{n}(p-1)$

·8 $c\varepsilon\mathrm{Rpr}p \;.\supset.\; ''\mathrm{Ind}(b,p)\times''\mathrm{Ind}(c,p)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(b,p)+\mathrm{n}(p-1)$

·9 $a\varepsilon\mathrm{Rpr}p \;.\supset:\; c\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(c,p-1)=1 \;.\supset_c.\; a^c\ \varepsilon\ \mathrm{Rpr}p$

✻ 41. $p\varepsilon\mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, a\varepsilon\mathrm{Rpr}p \,.\, b,c\ \varepsilon\ \mathrm{n}-\mathrm{n}p \;.\supset:$

·1 $\mathrm{gss}(p,b) = (p-1)\,\mathrm{D}[(p-1),''\mathrm{Ind}(b,p)]$

·2 $n\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, k\varepsilon\mathrm{n}\cap x\ni(bx^n\varepsilon c+\mathrm{n}p) \;.\supset.$
$n\times''\mathrm{Ind}(k,p)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(c,p)-''\mathrm{Ind}(b,p)+\mathrm{n}(p-1)$

In propositione ·2 es uno methodo ut resolve congruentia binomio $bx^n\varepsilon c+\mathrm{n}p$ (v. Arndt, J. f. math., t. 31, a.1846, p. 333). Ut applica ce methodo oporte tabulas de indice, pro que v. Gauss, Disqu. Arith., tabula de indice de numero primo ex 3 usque ad 97: — Tchebychef, Teoria delle congruenze (trad. Massarini), v. P 39·4.

✻ 42. $.\, p\varepsilon\mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, m\varepsilon\mathrm{N}_1 \;.\supset.$

·0 $\mathrm{Rpr}p^m = \mathrm{n}\cap x\ni[\mathrm{gss}(p^m,x) = \Phi p^m]$ Df

·1 $m\varepsilon\mathrm{N}_1+1 \;.\supset.\; \mathrm{Rpr}p^m = \mathrm{Rpr}p^2$

·2 $\mathrm{Num}[1\cdots(p^m-1)\cap\mathrm{Rpr}p^m] = \Phi\Phi p^m$

{Lebesgue, J. de Math., t. 19, a.1854, p. 289, 334}

✻ 43. $m\varepsilon\mathrm{N}_1 \,.\, p\varepsilon\ \mathrm{Np}-\iota 2 \,.\, a\varepsilon\ \mathrm{Rpr}p^m \,.\, b,c\varepsilon\ \mathrm{n}-\mathrm{n}p \;.\supset:$

·0 $''\mathrm{Ind}(b,p) = \min[\mathrm{N}_0\cap x\ni(a^x\varepsilon\ b+\mathrm{n}p^m)]$ Df

·1 $''\mathrm{Ind}(b,p)\ \varepsilon\ 0\cdots(\Phi p^m-1)$

·2 $k\varepsilon\ \mathrm{n}\cap x\ni(a^x\ \varepsilon\ b+\mathrm{n}p^m) \;.\supset.\; k\varepsilon''\mathrm{Ind}(b,p^m)+\mathrm{n}\times\Phi p^m$

·3 $''\mathrm{Ind}(1,p^m)=0$

·4 $''\mathrm{Ind}(a,p^m)=1$

·5 $b\varepsilon\ c+\mathrm{n}p^m \;.\supset.\; ''\mathrm{Ind}(b,p^m)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(c,p^m)+\mathrm{n}\times\Phi p^m$

·6 $''\mathrm{Ind}(bc,p^m)\ \varepsilon\ ''\mathrm{Ind}(b,p^m)+''\mathrm{Ind}(c,p^m)+\mathrm{n}\times\Phi p^m$

·7 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, ''\mathrm{Ind}(b^n, p^m) \;\varepsilon\; n \times ''\mathrm{Ind}(b,p) + \mathrm{n} \times \Phi p^m$

·8 $c \varepsilon \mathrm{Rpr}p^n \,.\supset.\, ''\mathrm{Ind}(b,p^m) \times ''\mathrm{Ind}(c,p^m) \;\varepsilon\; ''\mathrm{Ind}(b,p^m) + \mathrm{n} \times \Phi p^m$

·9 $c \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, \mathrm{D}(c, \Phi p^m) = 1 \,.\supset.\, a^c \;\varepsilon\; \mathrm{Rpr}p^m$

✻ 44. $\mathrm{Hp}43 \,.\supset:$

·1 $\mathrm{gss}(p^m, b) = \Phi p^m / \mathrm{D}[\Phi p^m, ''\mathrm{Ind}(b,p^m)]$

·2 $n = \mathrm{mp}[p, b^{\mathrm{gss}(p,b)} - 1] \,.\, m \geqq n \,.\supset.\, ''\mathrm{Ind}(b,p^m) \;\varepsilon\; \mathrm{N}_0 \times p^{n-1}$

·3 ——————————— $.\, m \leqq n \,.\supset.$ ———— $\varepsilon\; \mathrm{N}_0 \times p^{m-1}$

·4 $n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, k \varepsilon\, \mathrm{n} \frown x \ni (b x^n \varepsilon\, c + \mathrm{n} p^m) \,.\supset.$
$n \times ''\mathrm{Ind}(k, p^m) \;\varepsilon\; ''\mathrm{Ind}(c,p^m) - ''\mathrm{Ind}(b,p^m) + \mathrm{n} \times \Phi p^m$

✻ 45. $m \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.\supset:$

·0 $\mathrm{Rpr}2^m = \mathrm{n} \frown x \ni [\mathrm{gss}(2^m, x) = \Phi 2^m]$ Df

·1 $\mathrm{Rpr}1 = \mathrm{n}$

·2 $\mathrm{Rpr}2 = 2\mathrm{n} + 1$

·3 $\mathrm{Rpr}4 = 4\mathrm{n} - 1$

·4 $m \varepsilon\, \mathrm{N}_1 + 2 \,.\supset.\, -\exists\, \mathrm{Rpr}2^m$

·5 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, b \varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\supset.\, \exists (x,y) \ni [x,y \varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\, b \varepsilon\, (-1)^x 5^y + \mathrm{n}2^m]$

{Gauss, Disqu. Arith., art. 91}

✻ 46. $m \varepsilon\, \iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 2 \,.\, a \varepsilon\, \mathrm{Rpr}2^m \,.\, b \varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\supset.$

·0 $''\mathrm{Ind}(b, 2^m) = \min[\mathrm{N}_0 \frown x \ni (a^x \varepsilon\, b + \mathrm{n}2^m)]$ Df

·1 $''\mathrm{Ind}(b,1) = 0$

·2 $a \varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\supset.\, ''\mathrm{Ind}(b,2) = 1 \,.$

·3 $a \varepsilon\, 4\mathrm{n}-1 \,.\supset.\, ''\mathrm{Ind}(b,4) \;\varepsilon\; \iota 0 \cup \iota 1$

✻ 47·0 $m \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, b \varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\supset.\, \mathrm{Ind}(b, 2^m) =$
$\imath (x,y) \ni \{x \varepsilon\, \iota 0 \cup \iota 1 \,.\, y = \min \mathrm{N}_0 \frown y \ni [b \varepsilon\, (-1)^x 5^y + 2^m \mathrm{n}]\}$ Df

$\mathrm{Ind}(b, 2^m)$ es appellato systema de indices de b secundum modulo 2^m. Si es $m \leqq 2$, nos pote semper loque de systema de indices.

N. Amici in articulo *Risoluzione della congruenza* $x^m \equiv b$ (*mod.* 2^r), Rend. Circolo Mat. di Palermo, t. 8, a.1894, pp. 187-201,

appella « radice quasi primitivo di 2^r » numero que pertine ad exponente 2^{r-2}, et supra tali numeros pone fundamento de theoria de indices secundum modulo 2^r. Ipse ute ce methodo ut resolve congruentia $x^m \varepsilon b + 2^r \mathrm{n}$, et $a^x \varepsilon b + 2^r \mathrm{n}$, sed me inveni formula de resolutione pro congruentia $x^m \varepsilon b + 2^r n$. v. P31·5.

❋ 48. $m \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset.$

·0 $\mathrm{Rpr}\,m = \mathrm{n} \cap x \ni |\mathrm{gss}(m,x) = \Phi m|$

·1 $\exists \mathrm{Rpr}\,m .=. m \varepsilon \iota 1 \cup \iota 2 \cup \iota 4 \cup \iota(\mathrm{Np} - \iota 2) \uparrow \mathrm{N}_1 \cup \iota 2(\mathrm{Np} - \iota 2) \uparrow \mathrm{N}_1$

}Gauss, Disqu. Arith., art. 92{

Si m non habe radice primitivo, Dirichlet defini systema de indices de m, Berl. Abh, a.1837, p. 45 = Werke, t. 1, p. 313, aut *Vorlesungen*, suppl. 5. — V. et Bennett, London Trans., t. 184, a.1893, p. 189, ubi es et tabulas.

§ 8 Applicationes

❋ 49. $a \varepsilon \mathrm{N}_1 .\supset:$

·1 $\mathrm{n} \cap x \ni (x^{a-1} \varepsilon 1 + \mathrm{n}a) =$
$\mathrm{n} \cap x \ni \{x \uparrow \mathrm{mlt}\, \mathrm{D}(a, p-1) | p, \mathrm{Np} \cap a\, \mathrm{N}_1] - 1\ \varepsilon\, \mathrm{n}a\}$

·2 $\mathrm{Num}|1 \cdots (a-1) \cap x \ni (x^{a-1} \varepsilon 1 + \mathrm{n}a)| = \Pi | \mathrm{D}(a, p-1) | p, \mathrm{Np} \cap a\, \mathrm{N}_1|$

·3 $p, q \varepsilon \mathrm{Np} - \iota 2 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n}^2 + \mathrm{n}q - \mathrm{n}q .\supset. a \uparrow (pq-1)\ \varepsilon\ 1 + pq\mathrm{n}$

·31 $p \varepsilon \mathrm{Np} \cap 4\mathrm{N}_1 + 3 \,.\, 2p - 1\ \varepsilon \mathrm{Np} .\supset. 3 \uparrow p(2p-1)\ \varepsilon\ 1 + \mathrm{N}_1 \times p(2p-1)$

·32 $p \varepsilon \mathrm{Np} \cap 4\mathrm{N}_1 + 1 \,.\, 2p - 1\ \varepsilon \mathrm{Np} .\supset. 2 \uparrow p(2p-1)\ \varepsilon\ 1 + \mathrm{N}_1 \times p(2p-1)$

·33 ———————— . ———————— $.\supset. 3 \uparrow p(2p-1)\ \varepsilon\ 1 + \mathrm{N}_1 \times p(2p-1)$

·34 $p \varepsilon \mathrm{Np} \cap 20\mathrm{N}_0 + 1 \,.\, 2p - 1\ \varepsilon \mathrm{Np} .\supset. 10 \uparrow p(2p-1)\ \varepsilon\ 1 + \mathrm{N}_1 \times p(2p-1)$

}·1···34 v. meo scripto, *sui numeri composti* etc., Annali di M., s. 3., t. 9, a.1903, pp. 139-160{

❋ 50·1 $p \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, a \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{D}(a,p) = 1 \,.\, \mathrm{gss}(p,a) = p - 1 .\supset. p \varepsilon \mathrm{Np}$

}Lucas, *Sur la recherche des grands nombres premiers*, Congrès de Clermont-Ferrand, a.1876{

·2 $q \varepsilon \mathrm{Np} \cap 4\mathrm{N}_0 + 1 .\supset: 2q + 1\ \varepsilon\ \mathrm{Np} .=. 2^q + 1\ \varepsilon\ \mathrm{N}_1 \times (2q+1)$

·3 $q \varepsilon \mathrm{Np} \frown 4\mathrm{N}_0+3 \,.\supset:\, 2q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, 2^q-1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (2q+1)$

{LUCAS, Congrès du Havre, 1877}

·4 $q \varepsilon \mathrm{Np} \,.\supset:\, 4q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.$
$2 \uparrow q + 2 \uparrow [(q+1)/2] + 1 \smile 2 \uparrow q - 2 \uparrow [(q+1)/2] + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 (4q+1)$

·5 $m \varepsilon 2 \uparrow \mathrm{N}_1 \,.\supset:\, 2^m+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, 3 \uparrow (2^m-1)+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (2^m+1)$

{PROTH, Corr. N. a. 1878, t. 4, p. 210. Theoremas analogo circa numeros primo de forma 2^m+1 trade PÉPIN, Compt. R. de l'A. de Paris, 1877, 2° sem., p. 329. LUCAS tribue ad se ce P in praefatione de suo *Théorie des Nombres*, sed ibi es errore typographico.

·6 $q \varepsilon \mathrm{Np} \frown 4\mathrm{N}_0+3 \,.\supset:\, 6q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, 2 \uparrow 3q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (6q+1)$

·7 $q \varepsilon \mathrm{Np} \frown 4\mathrm{N}_1+1 \,.\supset:\, 6q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, 2 \uparrow 3q-1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (6q+1)$

·8 $m \varepsilon \mathrm{N}_1+1 \,.\, q \varepsilon \mathrm{Np} \frown [\mathrm{N}_1 + (9 \uparrow 2^{m-2}-1)/2^{m+1}] \,.\supset:$
$2^m q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.=.\, 3 \uparrow 2^{m-1} q+1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \times (2^m q+1)$

Vide meo scripto *Delle congruenze binomie* etc., Periodico di Mat., 1903, p. 330.

P·3 es in **F1902**, §Np7·4, sed non in forma completo.
P·5 = F1902, §Np7·2.

Super formula de Snell.

§1. *Nota historico*

Fundamento de opus de F. A. Proteche, *Manière de résoudre les triangles sans le secours des logarithmes*, edito in tomo LI de *Mémoires de la société academique de l'Aube*, a.1887, p.149-162, es formula:

$$B : 172 = b : (2a+c)$$

ubi B indica minor angulo acuto de triangulo rectangulo que habe pro cathetos b,c et pro hypotenusa a, expresso in gradu.

Ce formula, immerite adscripto ad Ozanam (1640-1717) ab Proteche et ab Brocard (vide *Mathésis*, a.1889, p.161-164), pertine ad Willebrord Snell von Rogen, *Cyclometricus*, a.1621, p.95, sicut nota Le Paige

(*Mathésis*, a.1890, p.95), et ut pate in Albert Girard, *Tables de Sinus*, a. 1626, et in Huygens, *De circuli magnitude inventa*, a.1654.

Ozanam, in *Nouvelle Trigonométrie*, a.1699, scribe:

« C'est un principe dont je n'ai pas d'autre démonstration que l'expérience, mais qui donne des résultats tellement approchées, que l'erreur à craindre en l'employant est moindre que celles, absolument fatales, qui ont pour causes multiples les imperfections de l'observation, qu'elles proviennent de la malfaçon des instruments ou du fait des observateurs ».

Verum formula praecedente es solo approximato; in facto, ratione de $2a+c$ ad $b \times \mathrm{B}$ non es constante, sed varia inter 171·887 et 172·279.

Propositio rigoroso es:

$$p,q\varepsilon\mathrm{p} \,.\, p-=q \,.\, r\varepsilon\mathrm{p}-\mathrm{recta}(p,q) \,.\, a=\mathrm{d}(q,r) \,.\, b=\mathrm{d}(r,p) \,.\, c=\mathrm{d}(p,q) \,.$$
$$a'=\mathrm{ang}(p-q,p-r)=\pi/2 \,.\, b'=\mathrm{ang}(q-r,q-p) \,.\, c'=\mathrm{ang}(r-p,r-q) \,.$$
$$b' \leqq c' \,.\supset.\, b'/3 > b/(2a+c) > 4b'/[\pi(2\sqrt{2}+1)]$$

Me considera triangulo rectangulo, de latus a,b,c et angulo opposito a',b',c'. Me suppone $a'=\pi/2$, $b' \leqq c'$. Tunc ratione de b ad summa de duplo de a cum c varia in intervallo scripto.

Demonstratione elementare in *Mathésis*, a.1889, p.267, aut uno plus completo sed non elementare in id. p.161, non es dato cum rigore debito. In ce nota me completa et transfer in symbolo ultimo demonstratio citato, determina limite supero de errore producto in applicatio de ce formula ad duo casu plus commodo de resolutione de triangulo rectangulo, et deduce plure formula analogo pro trigonometria de sphaera.

§2. *Lemma*

$$a\varepsilon\mathrm{Q} \,.\, f\varepsilon\mathrm{qF}\Theta a \,.\, x\varepsilon\Theta a \,.\, \mathrm{D}f\varepsilon(\mathrm{qF}\Theta a)\mathrm{cres} \,.\, f0=0 \,.\supset.$$
$$(fx/x|x,0\,\bar{\ }\,a)\ \varepsilon\ (\mathrm{qF}0\,\bar{\ }\,a)\ \mathrm{cres}.$$

[$\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{D}(fx/x\,|x,0\,\bar{\ }\,a,x) = [x\mathrm{D}(f,0\,\bar{\ }\,a,x)-(f,0\,\bar{\ }\,a,x)]/x^2$ (1)
$\mathrm{Form.\ a.1902} \,.\, \S\mathrm{D}\ \mathrm{P}5{\cdot}4 \,.\supset.\, (fx-f0)/x\ \varepsilon\ \mathrm{D}f`\theta x$ (2)
$\mathrm{Hp} \,.\, (2) \,.\supset.\, fx < f0+x\mathrm{D}fx$ (3)
$(1) \,.\, (3) \,.\supset.\, \mathrm{D}(fx/x\,|x,0\,\bar{\ }\,a,x)\ \varepsilon\ \mathrm{Q}$ (4)
$(4) \,.\, \S\mathrm{D}\ \mathrm{P}5{\cdot}6 \,.\supset.\, \mathrm{P}$]

Si a es quantitate positivo, si f es functio reale definito in intervallo de 0 ad a, cum derivata crescente in toto intervallo $0\,\bar{\ }\,a$, et si $f0$ es nullo, tunc ratio de functio ad variabile es crescente in idem intervallo. (*)

(*) Ecce plure propositio analogo:

$a\ \varepsilon\ \mathrm{Q} \,.\, f\varepsilon\ (\mathrm{qF}\Theta a) \,.\, x\varepsilon\,\Theta a \,.\supset:$

$f0\ \varepsilon\ -\mathrm{Q} \,.\, \mathrm{D}f\varepsilon\ (\mathrm{qF}\Theta a)-\mathrm{decr} \,.\supset.\, (fx/x|\,x,\ \Theta a)\ \varepsilon\ (\mathrm{qF}\Theta a)\ \mathrm{cres}$
» Q . » − cres » » decr
» (ι0) . » const » » const

Demonstratio completo analogo.

Quod lique geometrice. Ecce demonstratio analytico:

(1) Derivata de ratio de functio ad variabile habe expressio scripto;

(2) sed pro theorema de valore medio, ratio de incremento de functio ad incremento de variabile inter 0 et x es uno de valores de derivata in interno de intervallo θx;

(3) praeterea, sicut, per hypothesi, functio Df es crescente in toto intervallo $0\,^{-}a$, seque $y \varepsilon \theta x \,.\supset.\, \mathrm{D}fy < \mathrm{D}fx$; tunc per propositio praecedente $(fx - f0)/x < \mathrm{D}fx$, que aequivale ad relatione scripto, quia per hypothesi $x -= 0$;

(4) unde, post substitutio in (1), derivata de ratio de functio ad variabile in intervallo $0\,^{-}a$ es quantitate positivo;

(5) ergo, pro noto theorema super functio crescente, $fx/x \mid x$ cresce in toto intervallo $0\,^{-}a$. Quod era demonstrando.

§3. *Variatio de functio* $\sin x / [x(2+\cos x)] \mid x, \theta\pi/2$.

Nos habe hic propositio:

·0 $\quad x \varepsilon \theta\pi/2 \,.\supset.\, x/3 > \sin x/(2+\cos x) > x/\pi$

$[\; f = x/3 - \sin x/(2+\cos x) \mid x, \theta\pi/2] \,.\supset.\, f0 = 0$ (1)

$(1) \,.\supset.\, \mathrm{D}fx = (1-\cos x)^2/[3(2+\cos x)^2]$ (2)

$(2) \,.\supset.\, \mathrm{D}(f, 0\,^{-}\pi/2, x) \,\varepsilon\, (\mathrm{qF}0\,^{-}\pi/2)\,\mathrm{cres}$ (3)

$(1) \,.\, (3) \,.\, \mathrm{Lemma} \,.\supset.\, (fx/x \mid x, 0\,^{-}\pi/2) \,\varepsilon\, (\mathrm{qF}0\,^{-}\pi/2)\,\mathrm{cres}$ (4)

$\mathrm{Hp}\,(1) \,.\, \S\mathrm{DP}6{\cdot}1 \,.\supset.\, \lim(fx'/x' \mid x', 0) = 0$ (5)

$(1) \,.\, (4) \,.\supset.\, 0 < 1/3 - \sin x/[x(2+\cos x)] < 1/3 - 1/\pi$ (6)

$(6) \,.\supset.\, \mathrm{Ths} \;]$

Si x es quantitate positivo minore de $\pi/2$, functio $\sin x/(2+\cos x)$ es semper majore de tertio de x et minore de ratio de x ad π.

Ergo me considera functio $x/3 - \sin x/(2+\cos x)$ dato pro valores de variabile pertinente ad intervallo $\theta\pi/2$. Ce functio es nullo pro $x = 0$, et derivata de illo cresce in toto intervallo $0\,^{-}\pi/4$. Tunc, pro lemma praecedente, ratio de fx ad x cresce in idem intervallo. Sed limite de fx/x, quando x tende ad 0, es 0 pro theorema de l'Hospital, et $f(\pi/4)/(\pi/4)$ vale $1/3 - 1/\pi$; unde seque theorema.

Posito $\quad \mathrm{I} = [x(2+\cos x)/\sin x \mid x, \Theta\pi/4]$. $\quad$ I varia inter 3 et 3·0069 ...

Corollarios

·1 $\quad x \,\varepsilon\, \theta\pi/4 \,.\supset.\, x/3 > \sin x/(2+\cos x) > 4x/[\pi(2\sqrt{2}+1)]$

·2 $\quad x \,\varepsilon\, \pi/2\,^{-}\pi \,.\supset.\, (\pi-x)/3 > \sin x/(2-\cos x) > (\pi-x)/\pi$

·3 $\quad x \,\varepsilon\, \pi\,^{-}3\pi/2 \,.\supset.\, (\pi+x)/3 > \sin x/(\cos x-2) > (\pi+x)/\pi$

·4 $\quad x \,\varepsilon\, 3\pi/2\,^{-}2\pi \,.\supset.\, (2\pi-x)/\pi > \sin x/(2+\cos x) > (2\pi-x)/3$

§4. *Demonstratio de formola de Snell, et applicatio trigonometrico*

| Hp Form. P54·6 .$\supset$. $b/(2a+c) = \sin b'/(2+\cos b')$ (1)

(1) . $b'|x$ §3 P·1 .$\supset$. Ths |

Pro theorema de sinus, ab corollario praecedente emerge formula de Snell.

Mathematicos considera quatuor casu de resolutione de triangulo plano rectangulo:

1°. dato b et c; 2°. dato a et uno de cathetos b, c; 3°. dato a et uno de angulos acuto b', c'; 4°. dato uno de cathetos b, c et uno de angulos acuto b', c'.

Pro statue 3° et 4° casu, ope formula de Snell, opus es statue aequatio quadratico; tunc in ce casus, formula dicto es minus commodo.

Sed pro statue primo casu, que es problema de Snell (*Cyclometricus*, appendice, problema quinto): primo, per theorema de Pythagora $a = \sqrt{(b^2+c^2)}$; b' expresso in gradu secundo formula de Snell: $b' = 172b/(2a+c)$ et $c' = 90° - b'$.

Supposito a exacto, me quaere maximo errore possibile de b'.

$b/(2a+c)$ es functio crescente de $b' = \text{tang}^{-1}(b/c)$ quando b' varia de 0 ad $\pi/4$, id es b/c varia de 0 ad 1, et $b/(2a+c) = (b/c)/[2\sqrt{(1+b^2/c^2)}+1]$; ergo $b/(2a+c)$ es functio crescente de b/c cum b/c varia inter 0 et 1, tunc maximo valore de illo responde ad $b/c = 1$, et es $1/(2\sqrt{2}+1)$. Unde, maximo errore de b' es producto de maximo valore de I per $1/(2\sqrt{2}+1)$, id es vale gradu $[(180/\pi)\times\pi(2\sqrt{2}+1)/4 - 172]/(2\sqrt{2}+1) = \cdot 279/3\cdot 828 = \cdot 073$, que non supera 4′23″.

Pro calcula b' cum errore minore de 1″ construe tabula de valores de I, ut in *Mathésis*, a.1889, p.181.

Per theorema de Pythagora, 2° casu es reducto ad praecedente.

De §3 P·0·2·3 et de Form. §vet P55·1·2 me deduce plure formula de trigonometria super sphaera:

$u \varepsilon \mathrm{v}{-}\iota 0$. $v \varepsilon \mathrm{v}{-}\mathrm{q}u$. $w \varepsilon \mathrm{v}{-}(\mathrm{q}u+\mathrm{q}v)$. $a = \text{ang}(v, w)$. $b = \text{ang}(w, u)$. $c = \text{ang}(u, v)$. $a' = \text{ang}(u; v, w)$. $b' = \text{ang}(v; w, u)$. $c' = \text{ang}(w; u, v)$.$\supset$:

$a' = \pi/2$. $b' \varepsilon 0 \text{—} \pi/2$.$\supset$. $b'/3 > \sin b/(2\sin a + \cos b \sin c) \gtreqless b'/\pi$

» » $\pi/2 \text{—} \pi$ » $(\pi - b')/3 \gtreqless \sin b/(2\sin a - \cos b \sin c) \gtreqless (\pi - b')/\pi$

» » $\pi \text{—} 3\pi/2$ » $(\pi + b')/3 \gtreqless \sin b/(\cos b \sin c - 2\sin a) \gtreqless (\pi + b')/\pi$

et analogo que se deduce de praecedentes per substitutione

$$(a, b, a', b', c')|(a', b', a, b, c)$$

et que se demonstra in modo analogo.

Florentio Chionio

studente in Universitate de Torino.

DE INFINITO IN MATHEMATICA

PER PHILIP E. B. JOURDAIN

Es noto que Georg Cantor habe definito numeros transfinito et que ce numeros es aut *cardinale* aut *ordinale* (generalizatione de ultimo conceptu es *typos ordinale*) (§1). Cantor etiam habe statuto (1), et Russell habe probato (2), que omni bene definito aggregato (aut classe de terminos) habe numero cardinale; etsi Cantor habe postea (3) modificato isto judicio. Tamen, investigationes in theoria de numeros transfinito (4) duce me ad proba non solo que existe classes sine numeros cardinale, sed et ad criterio, simile, in plure respectu, ad criterio distinguente finito ab infinito, que determina omni ce classes (§3).

Meo resultatus proba plure importante *mathematico* theorema: et me puta resultatu de philosophico interesse es quod seque: Dum mathematico conceptiones et operationes es applicabile ad omni finito classe, et ad aliquo infinito classes, que pote es vocato « transfinito », tamen existe innumero classes, ad que ce conceptus non es applicabile. Primo exemplo que occurre es minimo classe tale que omni finito aut transfinito classe pote es ordinato in simile modo ut segmento de illo.

Mathematico tractamento de classes habe, tum, bene definito limite, quem nos tange prius quam nos perveni ad quod pote es vocato « infinito absoluto » (§5).

(1) In « Grundlagen » (pleno titulo seque) p. 2, Cantor dice « Jeder wohldefinirten Menge kommt eine bestimmte Mächtigkeit zu », et in modo simile in *Math. Ann.*, Bd. XLVI. (1895), p. 481.

(2) « The Principles of Mathematics », vol. i. (Cambridge, 1903), p. 305. Vide §2 infra.

(3) Vide infra, §4. In facto ille defini « Menge » ut classe (Vielheit) tale que suo numero cardinale vel potestate non es contradictorio. Hoc es in modo exacto eodem ratione ut meo. Me tenta solutione de contradictione inter proba de Russell et meo in §4.

(4) « On the transfinite cardinal numbers of well-ordered aggregates », *Phil. Mag.* Jan. 1904, pp. 61-75; « On the transfinite cardinal numbers of number-classes in general », *ibid.*, March, 1904, pp. 294-303; « On transfinite cardinal numbers of the exponential form », *ibid.*, Jan., 1905, pp. 42-56.

Me incipe cum breve expositione quemadmodum **Cantor** introduce suo transfinito numeros (1). Isto methodo habe valido analogia cum meo introductione (§3) de infinito absoluto, etsi es naturale que via de **Russell** pro considera fundamentos de mathematica (§2) debe modifica suo finale expositione.

Cantor es ducto ad necessitate de introduce aliquo definite infinito numeros per studio de aggregatos infinito de punctos sito super linea finito (si nos ute terminologia de Geometria pro conceptus que es, in realitate, puro analytico), sed, in sensu logico, theoria es independente de isto origine, et hic me vol da fundamentos independente super que **Cantor**, in « Grundlagen » introduce isto numeros (2).

Inter integros finito 1, 2,... n,... non existe maximo, vel « max N_1 » es symbolo sine valore. Ergo es contradictorio de loque de maximo integro n' (nam $n'+1$ es semper majore). Sed nullo contradictione es in introductione de *novo*, non finito, numero ω, que es definito ut *primo* numero que seque *omni* numero de N_1 (in ordine de magnitudo).

Cantor denota numeros transfinito per

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2, \ldots\ \omega+n, \ldots\ \omega\times2,\ \omega\times2+1, \ldots$$
$$\omega\times n, \ldots\ \omega^2, \ldots\ \omega^n\ \ \omega^\omega\ \ \omega\upharpoonright\omega\upharpoonright\omega \ldots\ldots \qquad \text{(N)}$$

ubi n es N_1. Interesse de illos pate ab historia de quaestiones in mathematica que necessita introductione de isto numeros (3). Sed nos concerne solo illos cum quaestione, si conceptione de tale numeros es possibile in logica, id es, si illo non duce ad contradictione (4).

(1) Dato in *Math. Ann.*, Bd. XXI (1883), pp. 545-591 [Dec., 1882], et reimpresso sub titulo: « Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen » (Leipzig, 1883).

(2) Me es scribente completo expositio historico, quem me vol publica in « Archiv der Math. und Phys. ».

(3) Usu de transfinito numeros in importante quæstiones de mathematica es etiam monstrato pro exemplo, per Hardy (*Proc. Lond. Math. Soc.* (2), vol. I, 1904, pp. 285-290) et per me (*Mess. of Math.*, April, 1904, pp. 1-6, et Crelle's Journ. für Math., Bd. CXXVIII. (1905), pp. 169-210).

(4) Cantor (« Grundlagen », pp. 18-20) tene thesi, quod formatione de conceptus in mathematica es complete libero, et debe solo satisfac conditione de logico consistentia de isto conceptus cum ceteros. Ergo tale conceptus habe « existentia » (in mathematica); Cf. §§ 2-4.

Cantor, pro omni intentu et proposito, monstra hoc in suo praecedente definitione de ω, et cum successu pleno, ille classifica et responde ad objectiones facto per philosophos et mathematicos ab tempore de Aristotele contra infinito actuale (vel *completo*, ut distincto ab « potentiale ») (1).

Characteristico et luminoso exemplo de ce criticismo es dato *à propos* de argumentos de Dühring contra infinito actuale (Eigentlich - Unendlich) (2).

Ce argumentos pote, dice Cantor, es reducto aut ad judicio que definito finito numero, ut magno, non pote es infinito (judicio identico), aut que numero variabile sine limite de magnitudine non pote es rato ut definito, et non es Ente (quo resulta immediato ab variabilitate). Conclude, ut Dühring fac, ad non ratione de definito infinito numero, es simile ad argumento ut, quod existe innumero intensitate de viride, nos non pote loque de rubente (3).

Logice exacto investigatione de existentia de numeros definito per infinito processus (ut ω per numeros finito, aut numero irrationale per rationales) fue incepto per Russell, et me reveni ad ce quaestione in proximo sectione.

Cantor monstra que serie de numeros transfinito habe divisiones, que voca « classes de numeros », characterizato per proprietate quod, si α et β es duo numero de idem classe, classe de omni numeros (ab 1) praecedente α pote es posito (in ordine differente) in correspondentia uno-uno, vel univoco et reciproco (rcp de Formulario), cum classe de numeros praecedente β. Cantor exprime hoc, dum dice que primo classe de numeros habe idem « potestate » ut secundo, aut que uno solo potestate pertine ad singulo « classe de numero ».

Ita, praeter serie de finito et transfinito numeros ordinale, existe serie de finito et transfinito potestates. Pro finito aggregatos, idea de potestate et de ordinale numero coincide, et

(1) « Grundlagen », pp. 9-18, 43-46 ; « Zur Lehre vom Transfiniten », Halle a. S., 1890 (Zeitschr. f. Phil. u. philos. Kritik, Bd. LXXXVIII, XCI., et XCII., 1885-1887).

(2) Vide « Grundlagen », pp. 44-45.

(3) Argumentos contra infinito in mathematica fue et discusso in modo exhauriente per Couturat (« De l'infini mathématique », Paris, 1896, pp. 441-503) et per Russell (*op. cit.*, pp. 355-362).

tale aggregato habe semper idem numero, independente de suo ordine. Sed infinito aggregato, etsi nullo permutatione altera suo potestate, quum isto attributo es, per definitione, independente de ordine, pote habe vario numeros ordinale.

Aggregato es dicto « simplo-ordinato », quando uno « ordine » es dato ad terminos de aggregato, ita ut, si a et b es duo termino, a aut *praecede* aut *seque* b, in virtute de aliquo relatione, que pote differ de ordine in spatio aut in tempore.

Aggregato simplo-ordinato non semper habe numero. In facto, numeros ordinale de Cantor se applica solo ad certo genere de ordinato aggregatos, quos ille voca « bene-ordinato », et que es characterizato ab proprietate quod *omni* subclasse habe, in ordine de serie originale, primo elemento. Tunc serie

$$a_1 , a_2 ,\dots a_n \dots ; b_1 , b_2$$

es bene-ordinato, et non es serie

$$b_1 , b_2 ;\dots ,a_n ,\dots a_2 , a_1 ,$$

ubi n es aliquo numero finito. Ergo, Cantor generaliza et re-nomina suo fundamentale conceptos in theoria de transfinito numeros. Vide MA. (= Math. Ann.) t. 46, a.1895, p. 481-512, RdM. t. 5, a.1895, p. 129-162; MA. t. 49, a.1897, p. 207-246.

Cantor proba que, ut duo aggregato m et n habe idem numero cardinale (Num $m =$ Num n, secundo Formul. t. 5 p.135), es necessario et sufficiente que illos es « aequivalente », id es, que existe correspondentia uno-uno inter elementos m et elementos n (Formul. ib. P1·0). Operationes de additione, multiplicatione, et exponentiatione pro cardinale numeros es definito (1), et aliquo quaestiones de mathematico importantia es investigato, includente conciso tractamento de numeros cardinale *finito* (2), et minimo numero cardinale transfinito ($\aleph_0$) (3). Et, quo nos concerne nunc intime, Cantor mentiona uno non interrupto serie de numeros cardinale

$$\text{(A)} \qquad \aleph_0 , \aleph_1 ,\dots, \aleph_n ,\dots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1},\cdots, \aleph_\gamma ,\dots$$

ut objecto pro futuro investigatione (4), et conclude que omni transfinito cardinale numero occurre in isto serie.

(1) MA. t. 46, p.485-488. RdM. t. 5, p. 133-136. Vide Form. ib. P5·0, 6·0, 7·0.
(2) MA. p. 489-492, RdM. p. 137-141.
(3) Ib. p. 492-495, RdM. p. 141.
(4) Ib. p. 495, 484, RdM. 145.

Conceptione de ordinato aggregato es introducto ibi MA. p. 496-498, RdM. p. 145-147.

Importante casu de simplo-ordinato aggregato es «bene-ordinato» aggregato (1), characterizato ante. Typos de bene-ordinato aggregatos vocare nunc «ordinale numeros», et ita nos perveni ad serie (N). Nunc, cardinale numeros de vario «segmentos» (2) de isto serie (N) forma serie (A), que est tale quod non existe cardinale numero inter duo consecutivo Aleph, et nullo minore que aliquo dato (per exemplo, considera $\aleph_\omega$), que non es uno Aleph praecedente dato in (A). Praeterea (A) posside notabile proprietate de es ordinate simile ad (N). Cetero investigationes de Cantor super ordinale numeros es de magis exclusivo mathematico interesse.

2.

In quaestione de «existentia» de vario cardinale numeros et ordinale typos definito per Cantor, mane aliquo opportunitate pro sceptico, et uno ex capitale objectos de opera de Russell (3) es de defini isto numeros, sine dubio circa existentia de illos.

Termino «existentia» non habe idem valore que in philosophia. Nos dice ut classe (vel aggregato) «existe», si habe uno aut plure termino. Et uno formale definitione es: a es existente classe, quando et solo quando propositione «x es a» ($x \varepsilon a$) es vero pro aliquo x (4). Theoremas de existentia in mathematica es proba quod vario classes definito (numeros,

(1) Vide arliculo in MA. t. 49.

(2) «Segmento» definito per termino a de uno bene-ordinato serie es serie de omni termino praecedente a. Cantor ute verbo «Abschnitt» (MA. t. 49, p. 210).

(3) Cf. «The Principles of Mathematics», vol. I, Cambridge, 1903, pp. IX, 111-116, 277-281, 313, 321-422, 497-498.

Ratione que duce Russell ad suo definitione de numeros ut classes es claro ab suo tractamento de reale numeros (cf. pp.270, 274-275-280-286). Peano («Sui Numeri Irrazionali», RdM., t. VI, pp. 126-140) observa que «segmentos» que illo defini, habe proprietates identico in theoria cum reale numeros, sed non in praxi.

Russell observa que, si *reale numeros es definito ut segmentos*, existentia de illos, in sensu in quo ille et Frege ute ce verbo, pote es probato, et hoc non pote es facto in alio modo.

(4) Russell, *op. cit.* p. 21; cf. p. 32.

typos, etc., vide infra) es existente classe, et hoc es facto, et es facto semper in mathematica quando proba de existentia de aliquo entitate es necesse, per actuale constructione vel indicatione de uno membro de classe (vel de entitate, ut pote es casu) (1).

Russell (2), nunc, defini cardinale numero de classe *u* ut classe de omni classe aequivalente ad *u*, et omni classe *u* habe cardinale numero, quum ultimo classe, habente semper uno membro, *u* ipso, existe. In modo simile, ordinale typo es classe de relationes generante serie. Catena de existentiale theoremas pro cardinale et ordinale arithmetica es nunc ut seque (3).

Nos pote incipe cum demonstra, que nullo finito classe contine omni termino. Hoc resulta ab factu que, quum 0 es numero cardinale, numero de numeros usque ad finito numero n incluso, es $n+1$:

$$n \varepsilon \mathrm{N}_0 \ .\supset. \ \mathrm{Num} 0 \cdots n = n+1$$

Nunc, si n es finito numero, $n+1$ es novo finito numero differente de omni praecedente. Ergo finito cardinales forma « progressione » (4), unde ordinale numero ω et cardinale numero $\aleph_0$ existe (in sensu mathematico).

Tunc, per solo permutatione de serie de finito cardinale numeros, nos obtine omni ordinale numero in secundo classe de Cantor. Nos pote nunc defini ω_1, ut classe de seriale relationes tale que, si u es classe contento in campo de uno de illos, dice que u habe successores implica et implicare que u habe terminos in finito numero aut $\aleph_0$; et es facile ad vide que serie de ordinale numeros de primo et secundo classe in ordine de magnitudo es de isto typo. Ergo existentia de ω_1 es probato; et $\aleph_1$ es definito ut cardinale numero de terminos in serie generato per relatione de typo ω_1. Tunc nos procede ad ω_2 et $\aleph_2$, ad ω_ω et $\aleph_\omega$, et ita pórro. Isto processu da uno-uno correlatione de ordinales cum aliquo cardinales; es evidente que, si nos extende processu, nos pote crea cardinale numero, correspondente ad omni ordinale.

(1) Frege, « Die Grundlagen der Arithmetik », Breslau, 1884, pp. 105-108.
(2) Op. cit., pp. 111-116, 304-307.
(3) Op. cit., pp.322-323; cf. Hibbert Journal, July, 1904, pp.810-811.
(4) Op. cit., p.239.

Cantor assume que omni classe es campo de aliquo bene-ordinato serie, et deduce que omni cardinale es Aleph (1). Russell puta isto assumptio non tuto.

Russell tunc nota difficultate (primo publicato per Burali-Forti) relato ad typo de *toto* serie de ordinale numeros.

Id es facile ad monstra que omni segmento de isto serie es bene-ordinato, et es naturale suppone que toto serie es etiam bene-ordinato. Si ita, suo typo debe es uno ordinale numero. Sed non existe maximo ordinale numero, quum omni ordinale cresce per additione de 1. Ab isto contradictione, Burali-Forti, quando inveni eo (2), infer que de duo differente ordinale, et de duo differente cardinale, non es necesse que uno es majore et altero minore. In hoc tamen, illo conscio contradice uno theorema de Cantor (3), que affirma opposito. Russell (4) examina isto theorema cum omni possibile cura, et non inveni defectu in proba; et praefer nega praemissa in argumento de Burali-Forti, que serie de omni ordinale numero es bene-ordinato. Tunc, typo de isto serie non es ordinale *numero*, et contradictione de Burali-Forti es explicato, quod, in generale, typo non cresce per additione de 1, et hoc semper es per ordinale numero.

Conveni da hic, in symbolos logico de Peano et Russell (5) propositiones præcedente:

✱ 1·1 $\Lambda = x \ni (x -= x)$ Dfp

Cf. Formulario t. 5, a.1905, p.12 P1·0.

·2 $a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, \exists u \,.=.\, u -= \Lambda$ Df

Isto Df es identico cum P2·0 de Formul. t. 5, p.12.

✱ 2. $u \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset.$

·1 $\mathrm{Nc}'u = \mathrm{Cls} \cap v \ni (v \text{ sim } u)$ Df

$=$ « cardinale numero de u ».

(1) Vide infra §3.

(2) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. XI, 1897.

(3) Math. Ann., Bd. XLIX, §13, Lehrsatz N.

(4) Op. cit., p.323.

(5) Whitehead Amer. JM. Vol. 24, a.1902, p.367-394. Pro simplicitate, me hic solo considera « cardinale » numeros. Russell defini typos et ordinale numeros ut classes de « seriale relationes ».

Isto Df es de Russell. Vide Whitehead, AmerJM., vol. 24, a.1902, p.371, P1.

Relatione « sim » de Russell (aut « æquivale ») pote es definito :

$a,b \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset:\, a \mathrm{\ sim\ } b \,.=.\, \exists(afb)\mathrm{rcp}$ Df

Cf. Formul. t. 5, p.75, 135. Symbolo « Num » de Peano es definito « per abstractione ». Df de « Nc », per contra, es « nominale ».

Cf. Russell, « The Principles of Mathematics » Vol. 1, a.1903, p.112.

·2 $\mathrm{NC} = z\ni[\exists\, \mathrm{Cls} \frown v\ni(z = \mathrm{Nc}'v)]$ Df

NC es classe de omni numero cardinale.

·21 $\exists\, \mathrm{Nc}'u$

[$u \mathrm{\ sim\ } u \,.\supset.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Nc}'u \,.\supset.$ Prop]

·3 $0 = \iota\Lambda$ Df

·31 $0 \,\varepsilon\, \mathrm{NC}$ [P2·2·1 $.\supset.$ Prop]

·32 $\exists\, 0$

·4 $1 = \mathrm{Cls} \frown v\ni(\exists v : x \varepsilon v \,.\supset_x.\, v{-}\iota x \,\varepsilon\, 0)$ Df

Cf. Form. t. 5 p.135, P4·0, p.46 §8 P1.

·5 $n \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} \,.\supset.\, n+1 = \mathrm{Cls} \frown v\ni(\exists v : x \varepsilon v \,.\supset_x.\, v{-}\iota x \,\varepsilon\, n)$ Df

·6 $\mathrm{NCFin} = \mathrm{NC} \frown n\ni$
$(s \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, 0 \,\varepsilon\, s : m \,\varepsilon\, \mathrm{NC} \frown s \,.\supset_m.\, m+1 \,\varepsilon\, s : \supset_s.\, n \varepsilon s)$ Df

·61 $n \varepsilon \mathrm{NCFin} \,.\supset.\, n+1 \,\varepsilon\, \mathrm{NCFin}$

·7 $\mathrm{ClsFin} = \bigcup \mathrm{NCFin}$ Df

Cf. Form. t. 5, p.82, §2.

·71 $v \varepsilon \mathrm{ClsFin} \,.\supset.\, \exists{-}v$

Cf. Russell, ibi p.322.

·72 $n \varepsilon \mathrm{NCFin} \,.\supset.\, \exists(n+1)$

·8 $\aleph_0 = \mathrm{Nc}\,'\,(\mathrm{NCFin})$ Df

·81 $\exists \aleph_0$

3.

In consequentia de uno observatione de **Hardy** (1), que omni transfinito cardinale numero es aut Aleph aut es majore quam omni Aleph, me es ducto ad da proba quod ce alternativa involve contradictione. Pro isto proposito, es necesse de monstra que serie de omni cardinale numero es, contra judicio de **Russell**, bene-ordinato, et proba es simplo (2). Ergo pro fuge contradictione de **Burali-Forti**, nos debe nega que serie W de ordinales numeros habe typo, vel cardinale numero.

Nos elimina usu (3) de observatione de **Hardy**, si nos imagina (4) elementos sumpto semper, in aliquo ordine, ex dato aggregato M, et posito in serie simile ad W. Si ce processu fini, cardinale numero de M es uno Aleph; si non, M contine parte que es aequivalente ad W, et isto M non pote habe cardinale numero.

Nunc, mane ad monstra que argumento de **Burali-Forti** non assume incorrecto hypothesi, quum illo statue quod typo de W es *maximo* ordinale.

(1) « A theorem concerniug the infinite cardinal numbers » Quart. Journ. of. Math. a.1903, p.87-94.

Me disce ab **Russell** quod argumento de **Hardy**, si scripto in forma, involve assumptione quod, dato classe de classes, non nullo, es possibile de inveni classe composito de uno termine ex omni classe in classe de classe :

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}'(\mathrm{Cls}-\iota\Lambda) \;.\supset.\; \exists\, \mathrm{Cls} \frown b\ni[x \varepsilon a \;.\supset_x.\; \mathrm{Nc}'(b \frown x)\, \varepsilon 1]$$

Simile assumptione es in proba de **Zermelo** quod omni aggregato pote es bene-ordinato (« Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet sein kann » MA. t. 59, a.1904, p.514-516). **Russell** stude assumptiones de isto genere, sine vide aliquo proba.

Meo argumento pote sume forma (vide Phil. Mag. Jan. a.1904, p.70) que redde illo independente de theorema de **Hardy** (que involve theorema **Schröder-Bernstein**).

In alio communicatione, me propone de considera, ut argumentos de me et de **Hardy** depende de existentia de multiplicativo classe; quod es connexo cum certo objectiones facto per **Borel** (MA. t. 60, a.1905, p.194-195) et **Hobson** (Proc. London M. S. serie 2, vol. 3, a.1905, p.170-188).

(2) Phil. Mag. Jan. a.1904, p.65-66.

(3) Ibid. p.70.

(4) Hoc non implica quod nos pote *ex usu* fac hoc ; nostro potestate es limitato ad finito numero de operationes, aut ad *lege* expresso in modo finito.

Nam, in primo loco, *appare* que typo de W, si existe, non satisfac tertio principio de Cantor, ut omni membro de W fac. Tunc, typo de W non es se contradicente conceptione, quod illo non es maximo ordinale numero, sed primo ordinale numero inter illos que veni post omni ordinale subjecto ad tertio principio (serie W), et debe existe per ratione simile ad ratione de existentia de ω. Tamen, si typo de W existe, illo satisfac tertio principio, ut me monstra in Phil. Mag. (a.1905, p.52-53), et ita contradictione de Burali-Forti mane.

Ita nos perveni ad perfecte bene-definito serie (W), sine typo et sine numero cardinale. Si opinione de Frege, que absentia de contradictione non *suffice* pro existentia (in mathematico sensu), es correcto, absentia in quaéstione es certe *necessario*. Nunc Schönflies statue quod serie W es ordinate simile ad aliquo (1) (bene-definito et bene-ordinato) serie ita ut omni alio bene-ordinato serie es simile aut ad illo aut ad segmento de illo. Et me in origine accepta isto judicio (2).

Sed me inveni (Phil. Mag. a.1905, p.83) que, etsi W non habe typo, definitione de serie simile ad W, secuto per (ex. gratia) uno elemento, non es contradictorio, et existe contradictione in defini elemento sequente cetero serie. Ergo W es simile solo ad uno segmento de isto alio serie.

Meo resultate es tunc, que, dum mathematico conceptiones de numero et typo es applicabile, non solo ad finito aggregatos, sed et ad lato classes de infinito aggregatos, tamen existe aggregatos, ad que isto conceptiones non es applicabile.

Etiam, inter isto nunc mentionato aggregatos, illos simile ad W es digno de speciale consideratione, ut indicante fine inter aggregatos que pote es tractato per mathematica, et illos alio. Omni serie simile ad segmento de W habe uno typo et cardinale, dum omni serie simile ad W, vel ad segmento simile ad W, non habe typo aut cardinale.

Denique, serie tale que omni alio bene-ordinato serie es simile

(1) Russell nota que me debe loque de « aliquo » serie in loco de « to » (τό, the, die, la) serie (ut me fac, secundo Schönflies, in Phil.Mag. Jan.1904, p.64 et Jan.1905, p.81), ita ut omni bene-ordinato serie es simile ad illo, aut ad uno segmento de illo, nam es obvio quod tale serie non es unico.

(2) Phil. Mag. a.1905, p.53.

aut ad illo, aut ad segmento de illo, transcende W (W es simile ad segmento de illo). Me pone particulare pondere ad isto ultimo puncto, quum Zermelo (MA. t. 59, a.1904, p.514-516), in proba quod omni dato aggregato pote es bene-ordinato, non monstra quod omni aggregato, cum cardinale numero, pote solo es bene ordinato super (abgebildet auf) aliquo segmento de W (1).

Nos pote statue meo resultatu in symbolos ut seque.

Si nos denota per No classe de omni ordinale numeros (que pote es ordinato in serie W) et si nos defini, pro amore de brevitate :

✱ 3·1 $a,b\varepsilon\mathrm{Cls} \;.\supset.\; a \supset \mathrm{prop}\, b \;.=.\; a \supset b \,.\, a -= b$ Df

Df de « a es proprio parte de b ».

·2 $c\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset.\; \mathrm{minore}'c = z \ni (z < c)$ Df

Si c es numero ordinale, tunc « minore'c » es classe de ordinale numero minore quam c. Classe No, de numeros ordinale, es definito per Russell RdM. t. 7 et 8.

✱ 4·1 $u\varepsilon\mathrm{Cls} \;.\supset:$

$\exists\, \mathrm{No} \cap c \ni (u \text{ sim minore}'c) \;.\cup.\; \exists\, \mathrm{Cls}'u \cap x \ni (x \text{ sim No})$

Vide Phil. Mag. a.1904, p.70.

·2 $-\mathrm{E}v \;.=.\; v\varepsilon\Lambda$ Df

Importantia de isto notione de « non existe v » (distincto ab $-\exists v$: non existe aliquo v) pate ex proximo propositione.

·3 $-\mathrm{E}\, \mathrm{Nc}'\mathrm{No}$

[$w = \mathrm{No} \cap c \ni (z\varepsilon\mathrm{No} \;.\supset_z.\; c > z) \;.\supset.\; w = \Lambda$ (1)

$\mathrm{Nc}'\mathrm{No}\, \varepsilon\, w$ (Burali-Forti et Jourdain loc. cit.) (2)

(2) . (1) . P4·1 $.\supset.$ Prop]

·4 $u\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, \exists\, \mathrm{Cls}'u \cap x \ni (x \text{ sim No}) \;.\supset.\; -\mathrm{E}\, \mathrm{Nc}'u$

·5 $u\varepsilon\mathrm{Cls} \,.\, \mathrm{E}\mathrm{Nc}'u \;.\supset.\; \exists\, \mathrm{No} \cap c \ni (\mathrm{Nc}'u = \mathrm{Nc}\ \mathrm{minore}'c)$

« Omni cardinale numero es Aleph ».

[P4·4·1 $.\supset.$ Prop]

(1) Majore amplitudo de meo proba es exposito in « détail » in uno articulo apparituro in Math. Ann., t.60, a.1905.

Me spera discurre de isto et aliquo alio propositiones, in modo magis amplo, in alio scripto. Quo pertine differentia inter $\exists$ et E, nos habe:

$$\ast\ 5\cdot1 \quad u\varepsilon \mathrm{Cls} \,.\supset\!: u \mathbin{-}\varepsilon \Lambda \,.\supset.\, \mathrm{E}u$$

$$\cdot2 \quad \mathrm{E}\Lambda \,.\, -\exists\Lambda$$

[P5·1 . 1·1·2 .⊃. Prop]

De altero latere, quia No sim No, nos es ducto ed affirme No ε Nc'No, unde $\exists$ Nc'No (etsi in realitate nos pote evita hoc, si nos dice quod Nc'No $-\varepsilon$Cls), dum -E Nc'No. (Vide et §4).

4.

Ita appare necesse que judicio de Cantor et Russell, que omni bene definito aggregato habe cardinale numero, debe es restricto. Cantor, in vero, veni ad contradictione resultante ab dando typo aut cardinale numero ad W, et in consequentia limita suo judicio in 1895, sed quia post illo publica nihil super subjecto, me solo audi de suo requisitiones post communicatione de meo resultatus identico (paene) ad illo in 1903.

Nunc, et contradictione, que Russell inveni (1), et que duce illo ad dic, post definitione de «classe» ut omni valore de x «tale que» aliquo propositionale functione φx es vero, (2) que «aliquo limitatione es necessario in isto judicio, etsi me ne pote detege in modo praeciso ut ce limitatione es. Hoc resulta ab contradictione, de que me vol discurre in longo in posteriore loco». Nunc isto contradictione non occurre pro aggregatos que pote es repraesentato per segmento de W.

Non es necesse que uno classe, ut definito per Russell, debe es «existente». Pro exemplo, classe nullo (Λ, classe de nullo termine) pote es definito ut classe de entitates x tale que x non es identico ad x, et classe nullo non existe. Sed etiam, si nos assume, ut Russell fac, quod omni propositionale functione defini uno classe, seque quod ordinale numero relativo ad W existe (in sensu de Russell), dum, ut nos supra vide, isto classe es se-contradicente. Ergo, criterio de Russell

(1) Op. cit. p.366-368, 101-107.

(2) Op. cit. p.20. Vide fine de ce sectione.

de « existentia » ne suffice pro exclude contradictione, et, in consequentia, non suffice pro mathematico usu.

« Existentia », secundo Russell, de uno classe, me opina, non responde omnino ad conditiones, necessario pro suo usu in mathematica.

Russell considera classe de terminos u aequivalente ad dato classe v; tunc proba quod isto classe existe, causa illo habe ad minimo uno membro, v ipso, nam v aequivale v. Sed me puta quod nos pote solo conclude quod *uno* (vel *plure*) classe de classes aequivalente ad v existe (id es, classe consistente de v, ad minimo), et non quod *to* (τό, the) classe de ce classes.

Si me intellige illo bene, Russell nunc admitte quod pote existe propositionale functiones, que non defini classe; quod es parte de meo contentione.

Aliquo de sequente judicios es extracto ab longo correspondentia cum Russell, datante, in parte principale, ab publicatione de vol. 1. de suo « Principles ».

Russell assume antea quod *omni* propositionale functione (φx) defini classe. Id es, symbolo $x\ni(\varphi x)$ es semper significante. Sed ce assumptione es postea modificato.

Difficultate cum argumento de Burali-Forti, me solve (a.1903) ut seque. Illo duce ad contradictione:

$$\mathrm{Nc'No}\ \varepsilon\ \mathrm{NC} : x \varepsilon\ \mathrm{NC} \ .\supset.\ \mathrm{Nc'No} > x$$

unde Nc'No > Nc'No. Ergo me conclude que w non habe cardinale numero; id es, non existe classe $v\ni$ (v sim No). Vide supra §3. De alio latere, Russell proba, si $v\ni$ (v sim No) es classe, propositione:

$$\mathrm{No\ sim\ No}\ .\supset.\ \exists\, v\ni(v\ \mathrm{sim\ No})$$

id es, v sim No es vero pro $v =$ No.

Proba de existentia, secundo Russell, non proba quod objectos considerato *es* classe. Illo assume hoc, et tunc proba que classes considerato non es nullo. Ita me es ducto ad nega quod criterio de « existentia » secundo Russell es insufficiente pro mathematico scopo. Me denota per E *novo* conceptione de existentia. Russell postea inveni (1) contradictione in notione

(1) Vide §5 infra. Russell es ducto ad isto contradictione per observatione que proba de Cantor quod $2^m > m$ falle si m es cardinale numero de omni termine.

de classe de omni ente que non es praedicabile de se ipso, que pote es exposito ut seque.

* 6·1 $w = x \ni (x \mathrel{-\varepsilon} x)$ Df

« w es classe de omni ente (ut x) que non es membro de se ipso ».

·2 P·1 $. \supset : x \varepsilon w . =_x . x \mathrel{-\varepsilon} x$

·3 P·2 $. \supset : w \varepsilon w . = . w \mathrel{-\varepsilon} w$

Hoc, nunc, duce **Russell** ad opinione que functione $x \mathrel{-\varepsilon} x$, et si vero pro aliquo x, non defini classe w.

Ergo nos es ducto ad conclusione que, etsi aliquo propositionale functiones (φx) defini classe repraesentato per symbolo

$$x \ni (\varphi x),$$

tamen aliquo formas de φx, ut

$$x \mathrel{-\varepsilon} x \quad , \quad x \text{ sim No} \quad , \quad x \text{ sim NC}$$

non fac hoc. Ergo existe classe de elementos x, ut per exemplo $x \mathrel{-\varepsilon} x$; sed non existe classe de omni tale elemento x.

Nos pote habe

$$u \varepsilon \text{Cls} : x \varepsilon u . \supset . x \mathrel{-\varepsilon} x$$

sed nos non pote infer

$$x \mathrel{-\varepsilon} x . \supset : x \varepsilon u . u \varepsilon \text{Cls},$$

Me non vide ratione pro discredita notione de « classe de omni classes », que es denotato per Cls, et es essentiale ad omni formale ratiocinio (1). Nam illo es necesse pro enuntia hypothesi de forma $u \varepsilon$ Cls.

« Omni Aleph » es classe (NC), et « omni ordinale numeros » es classe (No), sed

$$x \ni (x \text{ sim Cls}) \quad , \quad x \ni (x \text{ sim NC}) \quad , \quad x \ni (x \text{ sim No}),$$

vel, ut nos pote scribe:

$$\text{Nc'Cls} \quad , \quad \text{Nc'NC} \quad , \quad \text{Nc'No}$$

es non classes, et es nullo-entitate (*non* nullo-*classe*).

(1) Cfr. Russell, op. cit. p.101.

Infine pate quod, quum

$$\mathrm{Cls}\ \varepsilon\ \mathrm{Cls} \qquad \mathrm{Cls} = \mathrm{Cls},$$

coexistentia de ε et $=$ non es sufficiente evidentia, que conceptione, quem nos tracta, es se-contradicente.

5.

Existe aliquo classe, de que es facile proba contradictione. Ita Russell stude aliquo extremo casus de uno apparente valido argumento de Cantor, ad proba que omni classe habe magis subclasses que terminos:

$$u\varepsilon\ \mathrm{Cls}\ .\supset.\ \mathrm{Nc}'(\mathrm{Cls}'u) > \mathrm{Nc}'u.$$

Et es ducto ad consideratione de classe w (§4), se-contradicente.

Ita etiam, argumento de Burali-Forti deduce contradictione ab classes noto ut « typo de generante relatione W » et « cardinale numero de campo de W ».

Solutione de contradictione exposito per Russell tange fundationes de logica, et es priore ad toto mathematica. Mathematica considera solo aliquo contradictorio classe, ut typos de aliquo series, et cardinale numeros de aliquo classes; et isto mathematico contradictione consiste de contradictione exposito per Burali-Forti, et de aliquo casu de contradictione enuntiato per Russell.

Praecedente discussione, nunc, apta nos ad determina exacte quando classes es sine contradictione. Nullo classe noto ut typo aut cardinale numero de classe repraesentato per aliquo segmento de W, da origine ad contradictione de Burali-Forti, aut ad difficultate in applicatione de supra-mentionato argumento de Cantor (uno forma de contradictione de Russell). Contra, typo et cardinale numero de W, aut de serie transcendente W es contradictorio classe. Nunc, nos debe exclude uno se-contradicente classe ab mathematica. Mathematico non opera cum tale conceptiones, et « explanatione » de illos es materia de logica et philosophia. Tunc ce classes es mathematice non-existente; ergo criterio de Russell de « existentia » appare insufficiente pro mathematico necessitates (Cfr. §4).

Nos repete cum emphasi, quod W es simile ad segmento solo de omni serie tale quale omni bene-ordinato serie es simile aut ad illo aut ad segmento de illo; ita W (aut potius, serie simile ad W, definito sine ope de numeros) attine grande importantia ut criterio pro existentia de numeros. Existe, in facto, bene-ordinato aggregatos, que non habe numero et que non es « absolute » infinito, in sensu quod illos pote semper es rato ut segmentos.

PHILIP E. B. JOURDAIN

THE MANOR HOUSE
BROADWINDSOR, DORSET - *Nov.* *Dec.* 1905

SUPER THEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN.

per G. Peano.

G. CANTOR, in « Mathematische Annalen » anno 1895, tomo 46, pagina 484, et in « Rivista di Matematica » anno 1895, tomo 5, pagina 135, publica theorema sequente:

« Si x et y es numero cardinale, de $x \gtreqless y$ et $x \leqq y$, seque $x = y$ ».

Relationes $\gtreqless$ et $=$ inter numeros cardinale es definito per definitiones nominale:

$$a,b\varepsilon \text{ Cls } .\supset\!: \text{Num}a = \text{Num}b .=. \exists\, (b\text{F}a)\text{rcp} \qquad \text{Df}$$

« Si a et b es classe, nos dice que numero cardinale de a aequa numero cardinale de b, si existe functione reciproco, vel correspondentia uno-uno, inter a et b ».

$$a,b\varepsilon \text{ Cls } .\supset\!:$$
$$\text{Num}a \leqq \text{Num}b .=. \exists\, \text{Cls}'b \cap x\ni(\text{Num}a = \text{Num}x) \qquad \text{Df}$$

« Et que numero cardinale de a es minore aut aequale ad numero cardinale de b, si existe aliquo classe x de b tale que $\text{Num}a = \text{Num}x$ ».

Tunc nos pote elimina idea de numero cardinale, cum substitutione de valore definiente ad omni symbolo definito; theorema de CANTOR sume forma noto:

1. $a,b,c \varepsilon$ Cls . $c \supset b \supset a$. $g \varepsilon (c\mathrm{F}a)\mathrm{rep}$.$\supset$. $\exists\,(b\mathrm{F}a)\mathrm{rep}$

« Si a,b,c es tres classe, et classe a contine classe b, que contine classe c, et si g es functione, vel correspondentia, reciproco inter a et c, tunc existe correspondentia reciproco inter a et b ».

In scriptura de theorema praecedente occurre signos ε, Cls, $\supset$, F, rep, $\exists$; ergo theorema pertine ad Logica-Mathematica, si ita nos voca scientia que stude proprietates de signos scripto.

CANTOR non demonstra suo theorema. BERSTEIN publica demonstratione in BOREL, *Théorie des fonctions*, anno 1898, pagina 104. Post introductione partiale de symbolos, et aliquo modificatione, demonstratione sume forma sequente.

Si u es classe in a, me scribe gu in loco de $g`u$ de Formulario. gu indica figura respondente in relatione g, cum figura u. Tunc nos pote considera serie de classes:

$$u,\ gu,\ g^2u,\ g^3u, \ldots\ g^n u, \ldots$$

Me voca Zu summa, in senso logico, de illos:

2. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'a$.$\supset$. $Zu = \bigcup[g^n u \,|\, n`\mathrm{N}_0]$ Df

Tunc campo a es diviso in tres parte:

$a' = Z(a\text{-}b)$

$a'' = Z(b\text{-}c)$

$a''' = \bigcap[g^n a \,|\, n`\mathrm{N}_0]$, producto logico, vel parte commune ad classes de forma $g^n a$, ubi n es numero integro positivo aut nullo.

Campo b es diviso in tres parte:

$$b' = gZ(a\text{-}b), \quad b'' = a'', \quad b''' = a'''.$$

g es correspondentia uno-uno inter a' et b'; identitate transforma a'' in b'' et a''' in b'''.

Ergo, demonstratione de BERNSTEIN sume forma:

3. Hp P1 . Df 2 .$\supset$. $[g, Z(a\text{-}b)] \cup [\mathrm{idem}, a\text{-}Z(a\text{-}b)] \ \varepsilon\ (b\mathrm{F}a)\mathrm{rep}$

« In hypothesi de Propositione 1, et introducto symbolo Z per definitione 2, correspondentia que coincide cum g in campo $Z(a\text{-}b)$, et cum identitate in campo residuo de a, es correspondentia reciproco inter a et b ».

Demonstratione identico ad praecedente occurre et in ERNST SCHRÖDER « Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und

G. Cantor'sche Sätze ». Nova Acta, Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, tomo 71 n. 6, pag. 336-340, publicato in idem anno 1898, praesentato ad Academia in data 21. V. 1896, et scripto in Januario 1896. SCHRÖDER in definitione de Z, introduce serie de numeros N_0, et « limite ».

Nunc, meo seniore POINCARÉ, in interessante articulo « Les Mathématiques et la Logique » publicato in « Revue de Métaphysique et de Morale », Janvier anno 1906, pag. 27-29, post reproductione de demonstratione praecedente, nota que demonstratione contine idea de numero, et symbolo N_0, objecto de Arithmetica, dum theorema 1 pertine ad Logica ; et propone problema, si nos pote elimina signo N_0.

Es noto que omni symbolo x, que habe definitione nominale, vel definitione de forma

$x =$ « expressione composito per signos praecedente »

pote es eliminato in omni propositione ; suffice de scribe, in loco de x, secundo membro de definitione (vide Formul., t. 5, pagina 14).

Sed, si signo es introducto per postulatos, vel es « definito per postulatos » tunc suo eliminatione es dubio, et non semper es possibile.

In vero, omni symbolo de Formulario es definito per definitione nominale, aut per postulatos ; et si nos suppone licito eliminatione de illos, nos perveni ad absurdo, que es possibile de exprime toto scientia Mathematica, sine vocabulos et sine symbolos.

Symbolo N_0 es introducto in Formulario, per 5 postulatos ; uno de illos es regula de « inductione ». Ergo, a priori, eliminatione de symbolo N_0 es dubio. Sed, in casu particulare, proposito per POINCARÉ, eliminatione es possibile.

Nam, nos pote defini Zu, ut seque :

4. $u \varepsilon \mathrm{Cls}'a \,.\supset.\, Zu = \bigcap \mathrm{Cls}^\wedge r \ni (gr \supset r \,.\, u \supset r)$ Df

« Si u es classe de a, Zu indica parte commune ad classes r tale que functione g transforma r in parte de r, et que contine u ».

Demonstratione de Prop. 1 fi :

5. Hp P·1 . Df 4 $.\supset.$ $[g, Z(a-b)] \cup [\text{idem}, a-Z(a-b)] \;\varepsilon\; (b\mathrm{F}a)\mathrm{rcp}$.

Symbolo N_0 non figura in praesente demonstratione; regula de « inductione » non es postulato, sed es scripto in definitione 4 de Zu.

Demonstratione 5 es identico ad demonstratione 3. Veritate de thesi es intuitivo.

Sed nos pote decompone affirmatione de thesi in affirmationes elementare, et nos determina omni regula de Logica, applicato in modo implicito in demonstratione praecedente.

Signo $\cap$, de producto logico, es definito, in Formulario, per definitione nominale; ergo pote es eliminato. Prop. 4, vel definitione de Z, fi:

6. $Zu = x \ni [v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\supset_v .\, x \varepsilon v]$

« Zu es systema de omni elemento x, tale que si v es classe, transformato per operatione g in parte de se ipso, et continente u, semper x es elemento de v ».

Regula de simplificatione et syllogismo da propositione sequente:

7. $v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\, x \varepsilon u \,.\supset.\, x \varepsilon v.$

Nos exporta $x \varepsilon u$:

8. $x \varepsilon u \,.\supset : v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\supset_v .\, x \varepsilon v.$

Et per Prop. 6:

9. $x \varepsilon u \,.\supset.\, x \varepsilon Zu$

Nos opera per $x \ni$:

10. $u \supset Zu$

« Omni u pertine ad classe Zu ».

De Prop. 6 seque, post transformatione de $a = b$ in $a \supset b \,.\, b \supset a$,

11. $x \varepsilon Zu \,.\, v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\supset.\, x \varepsilon v$

Existe regula de logica:

12. $v, w \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset w \,.\, x \varepsilon v \,.\supset.\, gx \varepsilon w$

De Prop. 11 et 12 seque:

13. $x \varepsilon Zu \,.\, v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\supset.\, gx \varepsilon v$

Nos exporta $x \varepsilon Zu$; de definitione 6 de Zu seque:

14. $x \varepsilon \mathrm{Z}u \,.\supset.\, gx \varepsilon \mathrm{Z}u$

Nos elimina litera apparente x:

15. $g\mathrm{Z}u \supset \mathrm{Z}u$

« Classe Zu es transformato in parte de se, per operatione g »
De Prop. 10 et 15 seque:

16. $u \cup g\mathrm{Z}u \supset \mathrm{Z}u$.

De Prop. 6, cum transformatione analogo ad illo de Prop. 11, seque:

17. $v \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, gv \supset v \,.\, u \supset v \,.\supset_v.\, \mathrm{Z}u \supset v$.

In loco de v me pone $u \cup g\mathrm{Z}u$; et nota que, per Prop. 16, $g(u \cup g\mathrm{Z}u) \supset g\mathrm{Z}u \supset u \cup g\mathrm{Z}u$, et que $u \supset u \cup g\mathrm{Z}u$.

Ergo hypothesi es satisfacto, et nos affirma thesi:

18. $\mathrm{Z}u \supset u \cup g\mathrm{Z}u$.

De Prop. 16 et 18 resulta:

19. $\mathrm{Z}u = u \cup g\mathrm{Z}u$.

Si in Prop. 17, in loco de v me scribe a, me deduce:

20. $\mathrm{Z}u \supset a$.

De Prop. 20, et de noto identitate de logica, me conclude:

21. $a = \mathrm{Z}(a{-}b) \cup a{-}\mathrm{Z}(a{-}b)$.

De Prop. 19, seque:

22. $a = a{-}b \cup g\mathrm{Z}(a{-}b) \cup b{-}g\mathrm{Z}(a{-}b)$.

Si nos multiplica per b, id es, nos opera per $\frown b$, nos habe

23. $b = g\mathrm{Z}(a{-}b) \cup b{-}g\mathrm{Z}(a{-}b)$.

Nunc existe principio de Logica:

24. $g \varepsilon (c\mathrm{F}a)\mathrm{rep} \,.\, u \varepsilon \mathrm{Cls}'a \,.\supset.\, (g, u) \varepsilon (gu\, \mathrm{F}\, u)\mathrm{rep}$

« Si g es correspondentia reciproco inter a et c, illo es etiam correspondentia reciproco inter classe u, parte de a, et suo imagine gu ».

De Prop. 24 seque:

25. $[g, \mathrm{Z}(a{-}b)] \,\varepsilon\, [g\mathrm{Z}(a{-}b)\, \mathrm{F}\, \mathrm{Z}(a{-}b)]\mathrm{rep}$

« Functio g, in campo $Z(a-b)$, es correspondentia reciproco inter ce campo, et suo imagine $gZ(a-b)$ ».

Existe alio principio de Logica:

26. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\supset.\, (\mathrm{idem}, a) \,\varepsilon\, (a\mathrm{F}a)\mathrm{rep}$

« Si a es classe, tunc correspondentia idem, que ad omni objecto fac corresponde se ipso, es reciproco ».

Ergo, in nostro casu:

27. $[\mathrm{idem}, a-Z(a-b)] \,\varepsilon\, \{[a-Z(a-b)] \,\mathrm{F}\, [a-Z(a-b)]\}\mathrm{rep}.$

Nos applica novo principio de Logica:

28. $a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \,.\, g \,\varepsilon\, (c\mathrm{F}a)\mathrm{rep} \,.\, h \,\varepsilon\, (d\mathrm{F}b)\mathrm{rep} \,.\, a \frown b = \Lambda \,.$
$c \frown d = \Lambda \,.\supset.\, (g, a) \cup (h, b) \,\varepsilon\, [(c \cup d) \,\mathrm{F}\, (a \cup b)]\mathrm{rep}$

« Si a,b,c,d es classe, g es correspondentia reciproco inter a et c, h es correspondentia reciproco inter b et d, classes a et b habe nullo elemento commune, et idem es pro classes c et d, tunc correspondentia que coincide cum g in campo a et cum h in campo b, es correspondentia inter classes $a \cup b$ et $c \cup d$ reciproco.

De Prop. 25, 27, 28, et de 21, 23, seque:

29. $[g, Z(a-b)] \cup [\mathrm{idem}, a-Z(a-b)] \,\varepsilon\, (b\mathrm{F}a)\mathrm{rep},$

que es thesi de theorema 5.

Ita demonstratione de BERNSTEIN, facto per intuitione, es reducto ad operationes elementare de Logica, in numero finito.

* * *

De formulas scripto, me deduce novo consequentia, que habe aliquo interesse.

Me adde hypothesi

30. $\exists\, a-b$

non necessario pro veritate de theorema, sed pro suo importantia. Me suppone noto Logica, et non Arithmetica. Tunc signos $0, \mathrm{N}_0, +$ non habe sensu.

Ergo, me voca 0 aliquo elemento in classe $a-b$:

31. $0 \,\varepsilon\, a-b.$

Me pone

32. $\mathrm{N}_0 = Z(0)$

id es N_0 es classe Z respondente ad classe composito per solo elemento 0. Et me pone

33. $x+ = gx$,

et me lege 0, N_0 + ut in Arithmetica.

Tunc, de Prop. 10 seque $\iota 0 \supset N_0$, vel

I. $0 \varepsilon N_0$ « zero es numero ».

De Prop. 15 seque:

II. $x \varepsilon N_0 . \supset . x+ \varepsilon N_0$

« Si x es numero, et suo successivo $x+$ es numero ».

De Prop. 17:

III. $s \varepsilon \mathrm{Cls} . 0 \varepsilon s : x \varepsilon s . \supset_x . x+ \varepsilon s : \supset . N_0 \supset s$

« Si s es classe, que contine numero 0, et si omni successivo $x+$ de aliquo individuo x in classe s es s, tunc omni numero es s ». Es « principio de inductione ».

De definitione de functio reciproco seque:

IV. $x, y \varepsilon N_0 . x+ = y+ . \supset . x = y$

« Duo numero, que habe successivos aequale es aequale ».

Et de Prop. 31:

V. $x \varepsilon N_0 . \supset . x+ -= 0$

« 0 seque nullo numero ».

Id es, nos deduce theoremas, identico ad postulatos de Arithmetica. Ergo, pro symbolos de Arithmetica 0 N_0 +, subsiste interpretatione que satisfac ad systema de postulatos. Ita es probato (si proba es necessario), que postulatos de Arithmetica, que collaboratores de Formulario demonstra necessario et sufficiente, non involve in se contradictione.

Alio exemplo de entes, que satisfac systema de postulatos, es dato per Burali-Forti et per Russell. Sed proba que systema de postulatos de Arithmetica, aut de Geometria, non involve contradictione, non es, me puta, necessario. Nam nos non crea postulatos ad arbitrio, sed nos sume ut postulatos propositiones simplicissimo, scripto in modo explicito aut implicito, in omni tractatu de Arithmetica, aut de Geometria. Nostro analysi de principios de ce scientias es reductione de

affirmationes commune ad numero minimo, necessario et sufficiente. Systema de postulatos de Arithmetica et de Geometria es satisfacto per ideas que de numero et de puncto habe omni scriptore de Arithmetica et de Geometria. Nos cogita numero, ergo numero es.

Proba de coexistentia de systema de postulatos pote es utile, si postulatos es hypothetico, et non respondentes ad factu reale.

Articulo de POINCARÉ responde ad serie de scriptos, in idem Revue, collecto nunc in volumen:

L. COUTURAT, *Les principes des Mathématiques*, Paris, Alcan, a.1905, pag. VIII + 311,
ubi relationes inter Logica et Mathematica es tractato in modo diffuso et profundo.

Torino, 31 martio 1906.

Ex « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo 21, pag. 360-366 ».

ADDITIONE.

« Revue de Metaphysique et de Morale » publica duo novo scripto:

L. COUTURAT, *Pour la logistique*, pag. 208-250.
H. POINCARÉ, *Les mathématiques et la logique*, pag. 294-317,

Plure alio scriptore, que me cita infra, interveni, et discussione fi semper plus vasto et interessante.

Objecto principale de discussione es aliquo contradictione, vel antinomia, nunc detecto in quæstiones de Mathematica.

In omni tempore, aliquo antinomia occurre in Mathematica, que, post aliquo discussione, accipe solutione. Solutione de antinomia es indicatione de puncto ubi es errore in ratiocinio.

Es celebre, apud philosophos de Græcia, contradictione, vocato ab « Achille et testudine » (*); depende de æqualitate:

$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots\dots$$

ubi 1 æqua quantitate, que, dum varia, es semper minore de 1.

(*) B. Russell, *The principles of Mathematics*, Cambridge 1903, p. 358.

In seculo XVII es objecto de discussione serie

$1-1+1-1+\ldots\ldots$

que vale 1, 0, 1/2, etc., secundo lege que nos adopta in consideratione de limite.

Definitione exacto de « limite » elimina antinomias citato.

Primo antinomia, hodie in discussione, es invento in theoria de numeros transfinito, per:

C. Burali-Forti (Palermo R., a.1897).

B. Russell (*The principles of mathematics*, Cambridge a.1903, pag. 323) stude demonstratione de Burali, et construe novo antinomias, simile ad præcedente, sed plus simplice.

Ph. Jourdain, in præsente fasciculo (RdM., t.8 p.121-136) expone et discute in modo amplo isto quæstione, et me habe nihil ad adde.

Zermelo (MA. t.59 p.514-516) pone novo principio, admisso per aliquo scriptore, negato per ceteros, et discusso, simul cum antinomia de Burali, per:

König, MA. t.60 p.177,
Schönflies, MA. t.60 p.181,
Bernstein, MA. t.60 p.187,
Borel, MA. t.60 p.194,
Bernstein, MA. t.60 p.463,
Jourdain, MA. t.60 p.465,
König, MA. t.61 p.156.

Hadamard, Borel, Baire, Lebesgue in « Cinq lettres sur la théorie des ensembles », Bulletin de la Société math. de France, t. 33 pag. 261.

Etc., etc.

J. Richard in Revue générale des sciences, 30-VII-1905, p.542, expone et explica novo antinomia.

Inter publicationes novissimo me cita:

B. Russell, *The theory of Implication*, American J. t.28, p. 159-202, a.1906,

König, *Sur la théorie des ensembles*, Paris CR., t.143, 9-VII-1906.

Omni antinomia, antiquo et recente, depende de consideratione de « infinito ».

Consilio, que da aliquo Auctore, de non considera « infinito », es prudente, sed non resolve problema, nam infinito es in natura de plure quæstione, et « naturam expellas furca, tamen usque recurret ».

§1. Principio de Zermelo.

Zermelo, in demonstratione de propositione super classes bene-ordinato, adopta et enuntia :

« Principio, quod et pro infinito systema de classes, semper correspondentia existe, que ad omni classe fac corresponde uno suo elemento. ... Isto logico principio non pote es reducto ad alio plus simplice, sed es in mathematico deductione semper sine hæsitatione applicato » (*).

Principio significa, que nos pote sume infinito elemento arbitrario.

Isto assumptione, que occurre in plure libro, jam es considerato in anno 1890, in Math. Ann. t.37 pag. 210 : « on ne peut pas appliquer une infinité de fois une *loi arbitraire*, avec laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe..... ».

In vero, forma de ratiocinio :

« Me sume ad arbitrio elemento x in classe a ; tunc seque propositione p, (que non contine x) » es reductibile ad forma :

$\exists\, a$ (1)

$x \varepsilon a \,.\supset.\, p$ (2)

(1). (2) $.\supset.\, p$

« Si existe aliquo a, et si de $x\varepsilon a$ seque propositione p, tunc lice affirma propositione p ».

Es forma de ratiocinio vocato « eliminatione de x » in Formulario t. V p. 12 Prop. 3·1. Es reducto ad regula de « importatione » in Formul. t. 2 Prop. 74, 310, 331, 405.

(*) Prinzip, dass es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht. ... Dieses logische Prinzip lässt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischer Deduktion überall unbedenklich angewendet.

Assumptione de duo elemento successivo arbitrario habe forma :

$\exists\, a$ (1)

$x \varepsilon a \,.\supset.\, \exists\, b$ (2) b es classe que pote contine x,

$x \varepsilon a \,.\, y \varepsilon b \,.\supset.\, p$ (3)

p es propositione independente de x et y.

$(1) \,.\, (2) \,.\, (3) \,.\supset.\, p$

Per exemplo, pro demonstra theorema :

$u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls'q} \,.\supset.\, \lambda\lambda u \supset \lambda u$

« Si u es classe de quantitates, tunc classe limite de limite de u continere in classe limite de u » (Formul. V, pag. 139, Prop. 1·2), me affirma in primo loco :

$z \,\varepsilon\, \lambda\lambda u \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, \exists\, \lambda u \cap x \ni [\mathrm{mod}(x-z) < h/2]$ (1)

« Si z es elemento de $\lambda\lambda u$, et h es quantitate positivo, tunc existe aliquo individuo in classe λu, et x tale que suo distantia de z es minore de $h/2$ ».

Suo veritate pertine ad Mathematica, et non ad Logica.

$\mathrm{Hp}(1) \,.\, x \,\varepsilon\, \lambda u \,.\, \mathrm{mod}(x-z) < h/2 \,.\supset.$
$\exists\, u \cap y \ni [\mathrm{mod}(y-x) < h/2]$ (2)

« Si z et h conserva sensu, ut in hypothesi de (1), et si x es λu, distante de z minus que $h/2$, tunc existe elemento in classe u et y tale que suo distantia de x es minore de $h/2$ ».

$\mathrm{Hp}(2) \,.\, y \,\varepsilon\, u \,.\, \mathrm{mod}(y-x) < h/2 \,.\supset.\, \mathrm{mod}(y-z) < h$ (2')

« Si z, h, x habe valore ut supra, et si y es u, distante de x minus que $h/2$, tunc distantia de y ad z es minore que h ».

Me elimina y in thesi, per regula Formul. V pag. 12 Prop. 1·1 :

$\mathrm{Hp}(2') \,.\supset.\, \exists\, u \cap y \ni [\mathrm{mod}(y-z) < h]$ (3)

Nota que litera y in thesi es apparente, et pote es substituto per alio litera a...; illo non es litera y in hypothesi.

Hypothesi de (3) contine literas x et y. De (1) (2) (3) seque per eliminatione de x et y:

$z \,\varepsilon\, \lambda\lambda u \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, \exists\, u \cap y \ni [\mathrm{mod}(y-x) < h]$ (4)

Unde, per regula de Mathematica :

$z \,\varepsilon\, \lambda\lambda u \,.\supset.\, z \,\varepsilon\, \lambda u$,

et, post operatione per $z \ni$,

$\lambda\lambda u \supset \lambda u$.

Assumptione de duo elemento arbitrario x et y conduce ad ratiocinio cum 3 hypothesi (1) (2) (3), et thesi (4).

In generale, assumptione de n elemento arbitrario successivo duce ad ratiocinio que consta de $n+2$ propositiones.

Ergo nos non pote suppone $n = \infty$, id es nos non pote construe ratiocinio cum propositiones in numero infinito.

In Formulario, vocabulo « Syllogismo » indica uno forma de ratiocinio bene definito:

$$a \supset b \,.\, b \supset c \,.\supset.\, a \supset c$$

« Si de a seque b, et de b seque c, tunc de a seque c », vel « si omni a es b, et omni b es c, tunc omni a es c ».

Responde ad « syllogismo in Barbara » de scholasticos.

In tractatos de Logica commune, vocabulo « syllogismo » habe valore plus amplo, et non semper determinato.

Forma de ratiocinio, dicto « eliminatione » in Formulario, consta de tres propositione, et termino es triplice: major a, medio x, minor p. Ergo pote es vocato syllogismo, in sensu lato. Tunc omni forma de ratiocinio in Formul. parte I es syllogismo, aut sorite (catena de syllogismo). Ita habe sensu propositione de scholasticos, que omni forma de ratiocinio es reductibile ad syllogismos. Assumptione de uno elemento arbitrario, vel de plure, in numero finito, es syllogismo, vel sorite cum numero finito de præmissa.

M. Poincaré responde ad quæstione de Zermelo (pag. 313): « Les axiomes en question ne seront jamais que des propositions que les uns admettront... et dont les autres douteront... Il y a toutefois un point sur lequel tout le monde sera d'accord. L'axiome est évident pour les classes finies ».

Quæstione de evidentia es subjectivo, et non objecto de Mathematica.

Nos pote affirma:

« Assumptione de elementos arbitrario in numero finito es forma de ratiocinio reductibile ad systema de syllogismos (in sensu lato).

Si aliquo Auctore da demonstratione non reducto ad syllogismos, et si ille affirma que habe reducto demonstratione ad syllogismos, affirma falso ».

In plure casu, principio de Zermelo es reductibile ad syllogismos. Vide p. ex. demonstratione in scripto citato in Mathematische Annalen, t. 37, ubi es constructo functio f tale que $fu \varepsilon u$, si u es classe non nullo de numeros complexo de ordine n, et es clauso. Aliquo propositione, que plure Auctore demonstra cum applicatione (implicito) de principio de ZERMELO, es demonstrato in Formulario sine illo.

Id es, de plure propositione aliquo Auctore da demonstratione incompleto, que pote es completato.

In aliquo casu, nos non sci elimina postulato de Zermelo: tunc demonstratione non es reducto ad formas commune de ratiocinio; demonstratione non es valido, secundo valore commune de vocabulo « demonstratione ».

Per ex. in BOREL, *Théorie des fonctions*, a. 1898 pag. 13, propositione:

$$a \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, \mathrm{Num}a \,\varepsilon\, \mathrm{infn} \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{Cls}'a \frown b \ni (\mathrm{Num}b = \aleph_0)$$

« Si a es classe de objectos in numero infinito, tunc existe in a classe numerabile, id es que habe pro numero aleph zero $= \mathrm{Num}\, \mathrm{N}_0$ », es demonstrato per postulato de ZERMELO, et eliminatione de illo non es facile. Ergo propositione non es demonstrato.

Nunc nos debe opina que propositione es vero, aut es falso? Opinione nostro es indifferente. Theorema praecedente es simile ad theorema de GOLDBACH:

$$2(\mathrm{N}_1+1) \supset \mathrm{Np}+\mathrm{Np}$$

« Omni numero pari 4, 6, 8,... es summa de duo numero primo » que non habe demonstratione satisfaciente.

§2. THEOREMA DE CANTOR.

Pro intellige « antinomia » considerato per RICHARD, nos expone theorema de CANTOR, expresso in symbolos in Formulario t. V pag. 138 Prop. 11·1:

$$f \varepsilon \Theta \mathrm{f} \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \exists\, \Theta - f\text{‘}\mathrm{N}_1$$

« Si f es successione de quantitates in intervallo de 0 ad 1, tunc existe numero in isto intervallo, que non pertine ad suc-

cessione f », id es « classe numerabile in intervallo non pote constitue toto intervallo ».

Demonstratione reportato in Formulario es:

$$\Sigma[10^{-n}\mathrm{rest}(\mathrm{Cfr}_{-n}fn+5, 10)|n, \mathrm{N}_1] \ \varepsilon \ \Theta\text{-}f`\mathrm{N}_1$$

« Nos considera numero integro n; tunc fn es elemento de ordine n in successione; suo cifra decimale de ordine n es indicato in Formul. pag. 102 per $\mathrm{Cfr}_{-n} fn$.

Nos muta ce cifra. Per exemplo, nos adde 5, et subtrahe 10, si summa $\geqq 10$, et habe:

$\mathrm{rest}(\mathrm{Cfr}_{-n} fn+5, 10)$.

Tunc nos forma numero que habe ce cifra ut cifra decimale de ordine n. Illo non pertine ad successione. In vero, pro omni valore de n, illo es differente de fn, nam suo cifra de ordine n es differente de correspondente cifra de fn, et nos non es in casu de forma: $0{\cdot}999... = 1{\cdot}000...$, ubi duo fractione decimale de forma differente habe idem valore.

Pro brevitate, me pone:

$x \varepsilon 0\cdots9 \ .\supset. \ \mathrm{anti}x = \mathrm{rest}(x+5, 10)$ Def.

id es, si $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

anti $x = 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4$

Numero considerato sume forma:

$$\Sigma[10^{-n}\mathrm{anti}\ \mathrm{Cfr}_{-n}fn\ |n, \mathrm{N}_1].$$

In loco de anticifras de cifras de numeros dato, nos pote sume alio lege. Sed non lice sume, pro omni valore de n, uno cifra arbitrario ex cifras differente de $\mathrm{Cfr}_{-n} fn$, sine introductione de postulato de Zermelo.

§3. Antinomia Richard.

Prof. Richard in scripto citato, dice:

« Écrivons tous les arrangements 2 à 2 des 26 lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis à la suite tous les arrangements 3 à 3,... ».

« Tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation ».

Ergo classe de phrasi que pote es scripto in aliquo lingua, (per numero finito de vocabulos) es numerabile, vel habe potestate de N_1. Tunc es numerabile classe de ideas que pote es expresso per lingua commune. Et es numerabile classe de numeros decimale (fractione proprio) que pote es definito in lingua commune (et per signos de arithmetica et de algebra, que nos pote enuntia in lingua commune).

Auctore pone:

$E =$ « numeros decimale que pote es definito in lingua considerato »,

et construe super classe numerabile E numero que occurre in theorema de Cantor in § præcedente. Id es, si fn es numero de classe E, de loco n, Auctore considera numero:

$$N = \Sigma[10^{-n} \text{ anti Cfr}_{-n} fn \,|\, n, N_1] \qquad (1)$$

et voca G phrasi que traduce secundo membro in vocabulos de lingua commune. Tunc:

Numero N non pertine ad classe E, per ratione explicato in § præcedente.

Et pertine ad classe E, nam es definito per vocabulos de lingua considerato, in numero finito.

Quod es contradictorio.

Auctore solve contradictione ut seque:

« Le groupe de lettres G est un de ces arrangements: il existera dans mon tableau. Mais à la place qu'il occupe il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui ci n'est pas encore défini ».

Quod pote es traducto ut seque:

« Errore in contradictione præcedente es in secundo affirmatione. Nam E es classe de numeros definito per vocabulos de lingua commune; N es numero definito per vocabulos de lingua commune *et per litera E*, que non habe sensu in lingua commune. Ergo non lice conclude que N pertine ad classe E ».

Sed classe E es definito per vocabulos de lingua commune. Ergo, si nos substitue ad E suo definitione, N resulta expresso per solo vocabulos de lingua commune, et antinomia mane.

Numero N es definito in symbolos per propositione (1).

Membro definiente contine signos constante Cfr, anti, Σ.... et

signo variabile *f*. Litera *n* es apparente. Ergo N es definito per *fn*, « elemento de loco *n* in classe *E* ».

Me continua transformatione de definitione in symboles.

Me consideras literas *a*, *b*, *c*,... ut cifra in conveniente systema de numeratione. Basi *B* de systema es numero de illos ; circa 25. Si nos adde alios signo typographico, puncto, spatio..., numero *B* es semper finito. Me voca systema alphabetico sistema de numeratione in basi *B*, ubi cifras habe forma *a*, *b*, *c*,... *z*, 0. Ultimo es signo que non pote es initiale (p. ex. puncto typografico).

Tunc numeros N_1 es expresso per :

a, *b*,... *z*, *a*0, *aa*, *ab*,... *zz*, *a*00, *a*0*a*,... *duo*,... *sex*,... *uno*,... *uno diviso tres*,...

Omni successione de literas es numero naturale N_1, scripto in systema alphabetico.

Si *n* es numero naturale (N_1), et si illo, scripto in systema alphabetico, determina successione de literas, que habe sensu in lingua considerato, et defini numero decimale (Θ), me pone :

Valore n = numero decimale, quem numero *n*, scripto in systema alphabetico, defini, secundo regulas de lingua commune. (2).

Non per omni valore de *n*, « Valore *n* » es definito.

Numeros naturale, que expresso in systema alphabetico, determina phrasi que repræsenta decimale, constitue classe :

$$N_1 \frown x\ni(\text{Valore } x \;\varepsilon\; \Theta)$$

Numero de loco *n* in isto classe es repræsentato, juxta conventiones de Formulario (t. V, p. 120) per :

$$\min[N_1 \frown x\ni(\text{Valore } x \;\varepsilon\; \Theta)],$$

et « elemento de loco *n* in *E* » es expresso per :

$$fn = \text{Valore } \min_n[N_1 \frown x\ni(\text{Valore} x \;\varepsilon\; \Theta)] \qquad (3)$$

Nota que *fn* es valore de phrasi de ordine *n* que exprime decimale. Plure phrasi pote exprime idem numero. Quæstione non varia si nos considera solo decimales differente de præcedentes.

Formulas (1) (2) (3) exprime definitione de *N*.

Signo E, non es necessario. Toto definitione de N consta de propositione (1) que defini N per f, de (3) que defini f per « Valore », et de (1) que defini « Valore ». Propositiones (1) et (3) es in symbolo. Definitione de « Valore » es expresso per lingua commune, et aliquo obscuritate pote existe in illo.

§4. « La vraie solution » de M. Poincaré.

Poincaré da de antinomia Richard, et de alios, solutione sequente (pag. 307):

« E est l'ensemble de *tous* les nombres que l'on peut définir par un nombre fini de mots, *sans introduire la notion de l'ensemble E lui-même*. Sans quoi la définition de E contiendrait un cercle vicieux ».

Si pro « notione E » nos intellige signo E, tunc affirmatione de Auctore concorda cum usu commune, et es parte de regula scripto in Formul. V, pag. 14; nam definitione de aliquo signo x es æqualitate de forma:

x = (expressione composito per signos præcedente x).

Regula præcedente elimina, in modo mechanico et facile, omni possibilitate de circulo vitioso.

Regula de Poincaré non elimina possibilitate de circulo vitioso, nam exclude in secundo membro x, sed tace exclusione de signos sequente x.

Tunc definitiones de Richard contine nullo circulo vitioso. Resulta ex definitiones (1) (3) de §3, expresso in symbolos, et (2) expresso in lingua commune, ubi es puncto debile in argumento.

Et solutione de antinomia dato ab Poincaré, que accusa definitiones de circulo vitioso, non es exacto.

Si pro « notione E » nos intellige expressione æquivalente ad E, tunc in omni definitione, secundo membro, vel membro definiente, æquivalente ad primo, vel membro definito, contine semper notione de primo; et M. Poincaré contradice regula de usu commune, et redde impossibile omni definitione.

Per exemplo, definitione de differentia dato in omni libro (Formul., V, pag. 44) es:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\, b \,\varepsilon\, a+\mathrm{N}_0 \,.\supset.\, b-a = \imath\, \mathrm{N}_0 \frown x \ni (a+x=b) \qquad \text{Def.}$$

« Si a es numero, et b es numero $\geqq a$, tunc $b-a$ indica illo numero x que satisfac conditione $a+x=b$ ».

M. Poincaré, pag. 315, dice (quod es in *Franco* es vocabulo de Auctore, quod es in Latino es relativo ad meo exemplo):

« *Le défaut est encore le même; b—a est* inter TOUS *les* numeros illo que satisfac conditione; *sous peine de cercle vicieux, cela doit vouloir dire* inter *tous les* numeros *dans la définition desquels n'entre pas la notion de* minus. *Cela exclut* numero $b-a$, *qui depend de* minus. *La définition de b—a n'est donc pas prédicative.*

Definitione de radice non pote es dato que sub forma:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, \sqrt{a} = \imath\, \mathrm{Q} \frown x\ni(x^2 = a) \qquad \text{Def.}$$

« Si a es quantitate positivo, tunc $\sqrt{a}$ indica illo numero positivo, que habe pro quadrato a ».

Dice Poincaré: « Defectu es semper idem; $\sqrt{a}$ es inter totos numeros illo que habe pro quadrato a; sub pœna de circulo vitioso, hoc significa inter totos nnmeros, in definitione de que non es notione de $\sqrt{a}$. Hoc exclude $\sqrt{a}$ ».

Et in pag. 316, Poincaré dice:

« Le mot *tous* a un sens bien net quand il s'agit d'un nombre fini d'objets; pour qu'il en eût encore un, quand les objets sont en nombre infini, il faudrait qu'il y eût un infini actuel. Autrement *tous* ces objets ne pourront pas être conçus comme posés antérieurement à leur définition et alors si la définition d'une notion N dépend de *tous* les objets A, elle peut être entachée de cercle vicieux, si parmi les objets A il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion N elle-même ».

Per exemplo, me considera definitione de minimo multiplo commune, ut es dato ab Euclide usque ad hodie per toto Auctores (Formul., V, pag. 53):

$$a,b \,\varepsilon\, \mathrm{N}_1 \,.\supset.\, \mathrm{m}(a,b) = \min[(a\times\mathrm{N}_1) \frown (b\times\mathrm{N}_1)] \qquad \text{Def.}$$

« Si a et b es numero naturale, tunc $\mathrm{m}(a,b)$, lege (secundo Lebesgue, Lucas...) minimo multiplo commune ad a et b, indica minimo ex multiplos de a et de b ».

Dice Poincaré: « Vocabulo multiplos de a et de b non habe sensu, nam constitue infinito actuale. Si definitione de $\mathrm{m}(a,b)$

depende de totos objectos $a \times N_1 \frown b \times N_1$, illo es circulo vitioso, si inter istos objectos existe uno, $m(a,b)$, que non pote es definito sine $m(a,b)$ aut phrasi æquivalente ».

Me supra refer totos tres passu de Poincaré ubi exprime suo idea super definitiones. Sed objectione ad solutione de Poincaré es ita obvio, que me dubita de bene intellige Auctore, et me adde novo exemplo.

In Analisi es noto que:

$$x \, \varepsilon \, \mathrm{q} \, . \supset . \, e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (1)$$

$$e^{ix} = \text{serie noto} \qquad (2)$$

$$\cos x, \, \sin x = \text{serie noto} \qquad (3)$$

Formula (1) de Eulero exprime exponentiale per functiones trigonometrico, et exprime ambo functione cos, sin per exp. Ergo exp. contine notiones sin, cos; et sin, cos contine notione exp.

Regula de Logica-Mathematica dice: es arbitrario ordine de functiones exponentiale et trigonometrico. Si nos præsuppone definito exp. per (2), tunc (1) defini in modo rigoroso sin et cos. Et si nos præsuppone definito sin, cos per (3), tunc (1) es definitione legitimo de exponentiale. Hoc es omnino conforme ad opinione universale. Regula de Poincaré redde illegitimo omni definitione ex formula (1).

In conclusione, Formulario, in parte Logica-Mathematica, contine in modo explicito aut per citationes, regulas super definitiones et demonstrationes in Mathematica, detecto ab Aristotele et Leibniz usque ad hodie.

Regulas pro definitiones et demonstrationes, collecto in Formulario, per opera de collaboratores, es confrontato cum theorias de vario Auctores, et es applicato ad numero enorme de definitiones et demonstrationes de mathematica. Isto regulas es in generale satisfacto per Auctores de Mathematica. Si regula non es satisfacto, indica defectu in definitione et in demonstratione, ut in principio di Zermelo, jam notato, ab 15 anno.

Poincaré reconstrue, per proprio compto, Logica-Mathematica, independente de omni studio præcedente. Suo regula per definitiones, aut es nimis lato, et non impedi vitio, aut destrue

toto Mathematica. Ingenio vasto de Poincaré non perveni ad regula simplice:

$x =$ expressione composito per signos præcedente,

regula necessario et sufficiente pro eliminatione de circulo vitioso.

§5. Novo solutione.

Me procede ad calculo de:

$N =$ illo numero decimale, que habe pro cifra decimale de ordine generico n anticifra de cifra de ordine n de numero decimale expresso per phrasi que habe ordine n inter phrasi, exprimente numeros in lingua commune, ordinato secundo valore alphabetico,

ut es definito per Richard, post substi tutione de E per suo definiente.

Me seque, in orthographia, Latino.

Nos imagina successione de phrasi, vel de numeros naturale scripto in systema alphabetico. Primos phrasi, que exprime decimales, es (me suppone):

duo diviso sex $= 0{\cdot}333...$

uno diviso duo $= 0{\cdot}5$

uno diviso sex $= 0{\cdot}1666...$

tunc $N = 0{\cdot}851...$

Serie de phrasi cum 12 litera, ut præcedentes, in charactere minuto, forma linea multo plus longo que distantia de Terra ad Sole.

Nos procede ad phrasi plus longo, ad definitiones de π, de e, etc. Quando nos tracta phrasi de 100 literas, linea de cifras calculato per N supera omni mensura de mundo physico.

Nostro mente continua calculo, perveni ad phrasi de 200 literas, ubi infine se præsenta phrasi definiente N.

Me voca $m-1$ numero de cifras jam calculato de N, quando occurre phrasi definiente N.

Tunc nos debe calcula cifra de ordine m de N; phrasi de

ordine m inter phrasi exprimente numeros es phrasi definiente N. Tunc regula dice:

« Cifra de ordine m de N vale anticifra de se ipso ».

vel $$\text{Cfr}_{-m} N = \text{anti Cfr}_{-m} N,$$

vel $$x -= x,$$

que exprime assurdo.

Ergo uno de conditione que determina serie de cifras de N es contradictorio.

Phrasi definiente N habe apparentia de defini numero.

Secundo lingua commune, « numero N non existe »; in symbolos nos non pote scribe

$$N \varepsilon \Theta$$

Definitione praecedente es simile ad definitiones:

N = (maximo numero primo) (EUCLIDE)

» = (illo numero que satisfac conditione x non $= x$ (RICHARD)

» = (illo numero reale que satisfac conditione $x^2+1=0$)

» = (illo numero reale que satisfac conditione $x^2-1=0$)

» = (lim sin$x$, pro $x = \infty$)

» = (derivata de mod$x$, pro $x=0$)

que habe apparentia de numero, sed non indica numero.

Ratione es obvio, et es scripto in Formulario.

In exemplos praecedente occurre vocabulo « illo », que responde ad signo ι de Formulario. In vocabulos « maximo » « limite » « derivata » signo ι es in definitione.

Vide in Formulario definitiones de « maximo » (tomo V p.46), de « limite » (pag. 214). « Derivata » es definito per « limite ».

In omni casu, ut nos pote deduce de definitione aliquo propositione de forma

$\iota a \varepsilon u$ « illo a es u » « ιa existe in classe u ».

es necesse et suffice que es satisfacto conditiones scripto in Formulario, in definitione de ι (pag. 13)

$$a \varepsilon \text{Cls} . \exists a : x,y \varepsilon a . \supset_{x,y} . x = y$$

« a es classe, existente vel non nullo: et si nos sume duo individuo x,y in classe a, semper es $x = y$ »;

vel « a es conditione que determina uno et uno solo individuo ».

In exemplos citato, classe que seque « illo » aut es nullo (ut in casu de Richard), aut contine plure individuo.

Præsente solutione fore ultimo? Mane in definitione de N puncto debile, suo expressione per lingua commune.

Si phrasi que defini N non exprime numero, ut me supra demonstra, tunc in calculo de N me i præter ce phrasi, que non defini numero, et definitione de N habe sensu; id es, si N non existe, tunc existe.

Isto novo antinomia es simile ad affirmationes:

Quod me dice es falso,

Quod me dice es sine sensu,

que, si es vero, es falso, et si es falso es vero (*).

Contradictione es in ambiguitate de phrasi N; es necesse de adde in modo explicito « isto phrasi incluso » aut « isto phrasi excluso ».

Tunc nos non considera phrasi ambiguo N, et nos procede ultra. Pauco plus longe nos inveni phrasi:

N' = (phrasi N), isto phrasi excluso;
N'' = (phrasi N), isto phrasi incluso.

N'' non habe valore, per ratione dicto. N' repræsenta numero determinato, pertinente ad classe E, et differente de omni *alio* numero E, quod pate.

Sed puncto debile principale in mirabile exemplo de Richard es: definitione de N es dato parte in symbolos (Prop. 1, 3, pagine 150, 151), et parte non in symbolos (Prop. 2). Parte non symbolico contine idea de « lingua commune », idea multo familiare ad nos, sed non determinato, et causa de omni ambiguitate. Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad Linguistica; uno elemento, fundamentale in definitione de N, non pote es definito in modo exacto (secundo regulas de Mathematica). Ex elemento non bene definito nos pote duce plure conclusione contradictorio inter se.

(*) Russel, *The principles of Mathematics*, passim.

23 augusto 1906.

G. Peano.

Exemplo notabile de functio discontinuo.

Functio

$$(1) \qquad \varphi(u) = \lim_{n=\infty} \left[\lim_{t=0} \frac{\operatorname{sen}^2(n!\pi u)}{\operatorname{sen}^2(n!\pi u)+t^2} \right]$$

ubi n denota numero integro, assume, ut es noto, valore 0 si u es rationale et valore 1 si u es irrationale.

Cum auxilio de isto functio, me construe functio z de duo variabile x, y, que in singulo puncto (x_0, y_0) de conveniente regione C es continuo solo secundo curva de dato familia

$$(2) \qquad \psi(x,y) = k$$

(ubi k es parametro variabile) que decurre per puncto (x_0, y_0).

Si $z = F_1(x,y)$, $z = F_2(x,y)$ es duo functio continuo in regione C_1 que contine regione C, intra que sta curva (2) quum k varia inter limite definito, nos considera, intra regione C, functio

$$(3) \qquad z = \varphi(\psi(x,y))\, F_1(x,y) + \{1-\varphi(\psi(x,y))\}\, F_2(x,y).$$

Si (x_0, y_0) es aliquo puncto de regione C, et si es $\psi(x_0, y_0) = k_0$, curva L de aequatione

$$\psi(x,y) = k_0$$

decurre per puncto (x_0, y_0). Secundo isto linea L, functio (3) assume idem valore quam functio F_1 si k_0 es irrationale aut idem valore quam F_2 si k_0 es rationale; ergo per continuitate de F_1 et F_2, functio (3) es in (x_0, y_0) continuo secundo L.

Si L′ es alio linea que transi per puncto (x_0, y_0), quoniam me pote semper pone due functio F_1 et F_2 non habente in regione C valore commune, functio (3) es in (x_0, y_0) discontinuo secundo isto linea quia in omni arcu de L′ parvo ad arbitrio, classe de puncto in que functio (3) assume valore de F_1 es denso et etiam denso classe de puncto in que assume valore de F_2.

Per exemplo, functio

$$z = \varphi(x^2+y^2)A + \{1-\varphi(x^2+y^2)\}B$$

ubi es $A \neq B$, es continuo secundo omni circulo cum centro in (0,0) quia assume ibi aut valore A aut valore B, atque es discontinuo secundo alio linea.

Filippo Sibirani
in Bologna.

NOTITIAS SUPER LINGUA INTERNATIONALE.

Quæstione es de interesse generale, et me da aliquo exemplo de novo projectos de lingua internationale, primos 5 tracto ex « La Revue de l'Esperanto » per A. Michaux. Illos habe nomen differente, sed convergentia ad solutione es evidente.

Panroman per Dr. Molenaar

Honoret Senior (Seniorina) !

Exist plus ke 100 (zent) diferent soluzioni de problem de kreer un ling internazional o universal ; ma io kred, ke nul de ist soluzioni es si simpl ke Panroman. Volapük es mort, perke eseva trop artifizial ; Esperanto non prosperero, perke non es homogen e prend son vokabli de lingi totale diferent (rus, german, angles, franzes, latin, grek, etc.). Un text esperantist non es komprensibl, si on hab non studet ist ling ; ma Panroman es komprendet a prim vist per tut homi, ki sap un ling roman. Son grand utilitat es dunk evident.

Esperanto sen lerno (Specie de Esperanto sine flexione)

Honorat Sinjor (Sinjorin)

Ekzist pli ol cent diferent solv de problem krei lingv internaci au' universal ; sed mi kred, ke neni solv est se simpl ke Panroman. Volapuk est mort c'ar est tro artifik. Esperanto ne prosperos, c'ar ne est homogen kai pren sia diksionar de lingv tute diferent (rus, german, angl, franc, latin, grek, k.t.p.) Tekst esperantist ne es komprenebl se oni ne studi ti lingv; sed Panroman est komprenit subit per tut hom ki sci lingv roman. Sia grand util es do evident.

Idiom neutral

Omni du lingui, Esperanto e Id. N. es verase lingui ; ili av no sole gramatik, kuale proyekti de lingui, ma ili av diksionari sufise komplet kontenant plu ka 10000 paroli, durante ke leplu mult otr lingui de grup ters es sole proyekti de lingu. Radiki de ist du lingui esav prended prinsipale teli, keli eksist in omni lingui europan, p. e. *palm*, *person*, *planet*. In gramatiki on truv serii de prefiksi e sufiksi ko signikasioni firm ; ili potes esar adyunkted a radiki pro formasion de paroli nov.

Esperanto sen lerno

La du lingv esperanto kai Idiom Neutral est vere lingv.

Ili hav ne sole gramatik kiel projekt de lingv sed ili hav vortar sufic'e komplet kun pli ol 10000 vort dun la pli mult de ali lingv de divers grup est sole projekt de lingv.

La radik de la du lingv est prenit precipe tiel kiel ekzist in ali lingv europan. En gramatik oni trov seri de prefiks au' sufiks kun signif firm. Ili pov est supermetit al radik por form de vort nov.

Esperanto vero es minus intelligibile :

Kvankam ne konverteblaj pri alia vojo, ni devas gratuli, la verajn scienculojn kiel S^roj Rosemberger kaj Molenaar kiuj serc'as la neatingeblan perfektecon c'ar, kiel ni, ili celas la tutmondan interkomprenig'on.

Versione « Quanquam ne convertibiles pro alio via, nos debe gratula cum veros scientiato, ut dom. Rosemberger et Molenaar, que quære ne attingibile perfectione, nam, ut nos, scopo de illos es que toto mundo intellige inter se.

Latino commerciale, per Dr. Colombo, Paris, Lethielleux.

Honorem habeo offerendi Vobis, Domine, aliquos excellentes articulos, modico prĕtio, sicut in catalogo Videbitis.

Spero, mercis valore et pretii modicitate agnotis, me jusso honorandum.

In hac spe, urbanè præbeo Vobis, Domine, omnes meas verecundas salutationes.

FINE DE TOMO VIII.